

# Riemann の $\zeta$ -関数についてのまとめ

## 1 定義

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \quad (\operatorname{Re} z > 1) \quad (1)$$

## 2 積分表示

1.

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \int_0^{\infty} \frac{t^z e^t}{(e^t - 1)^2} dt \quad (2)$$

証明)

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dx &= \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1} e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} e^{-nt} dt, \\ &\text{(被積分関数をテラー展開)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-(n+1)t} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^z} \int_0^{\infty} u^{z-1} e^{-u} du, \quad ((n+1)t = u \text{ とおいた}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^z} \Gamma(z) = \Gamma(z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \end{aligned}$$

(2) の 2 番目の等号は部分積分して  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  を使う。

2.

$$\zeta(z) = \frac{1}{(1 - 2^{1-z})\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t + 1} dt = \frac{1}{(1 - 2^{1-z})\Gamma(z+1)} \int_0^{\infty} \frac{t^z e^t}{(e^t + 1)^2} dt \quad (3)$$

証明)

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t+1} dx &= \int_0^\infty \frac{t^{z-1}e^{-t}}{1+e^{-t}} dt = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty (-1)^n t^{z-1} e^{-t} e^{-nt} dt, \\
&\text{(被積分関数をテラー展開)} \\
&= \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^z} \Gamma(z) = \left( -\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)^z} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^z} \right) \Gamma(z), \\
&= \left( -2 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)^z} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)^z} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^z} \right) \Gamma(z), \\
&= \left( -2 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)^z} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z} \right) \Gamma(z), \\
&= \left( -2^{1-z} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z} \right) \Gamma(z) = (1-2^{1-z}) \Gamma(z) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z},
\end{aligned}$$

2 番目の等号は上と同じ

### 3 統計力学でよく使う表式

以下に挙げる例は 3 次元の場合。次元が違くと  $n$  の違う  $\zeta$  関数が出てくる。励起の分散関係が異なる場合も同様。

1.  $z = n$  (整数) の場合

$$\zeta(n) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{e^t-1} dt, \quad (4)$$

(例：空洞輻射の内部エネルギー、

デバイモデルの低温での内部エネルギー： $n = 4$ )

$$= \frac{1}{n!} \int_0^\infty \frac{t^n e^t}{(e^t-1)^2} dt,$$

(例：空洞輻射の比熱、デバイモデルの低温比熱： $n = 4$ ) (5)

$$= \frac{1}{(1-2^{1-n})(n-1)!} \int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{e^t+1} dt \quad (6)$$

$$= \frac{1}{(1-2^{1-n})n!} \int_0^\infty \frac{t^n e^t}{(e^t+1)^2} dt$$

(例：フェルミ気体の比熱など： $n = 2$ ) (7)

証明： $\Gamma(n) = (n-1)!$  より明らか。

2.  $z = n + 1/2$  (半奇数) の場合

$$\zeta(n + 1/2) = \frac{2^n}{(2n - 1)!!\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{t^{n-1/2}}{e^t - 1} dt \quad (8)$$

$$= \frac{2^{n+1}}{(2n + 1)!!\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{t^{n+1/2}e^t}{(e^t - 1)^2} dt, \quad (9)$$

(例：ボーズ気体の粒子数： $n = 3/2$ 、比熱  $n = 5/2$ )

$$= \frac{1}{(1 - 2^{1/2-n})} \frac{2^n}{(2n - 1)!!\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{t^{n-1/2}}{e^t + 1} dt \quad (10)$$

$$= \frac{1}{(1 - 2^{1/2-n})} \frac{2^{n+1}}{(2n + 1)!!\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{t^{n+1/2}e^t}{(e^t + 1)^2} dt \quad (11)$$

証明は次のようにすればよい

(a)  $\Gamma(n + 1/2) = (2n - 1)!! \cdot 2^{-n}\Gamma(1/2)$  を示せ。

(b)  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  を示せ ( $t = u^2$  とおくとガウス積分に帰着する)

## 4 よく使う点での値

1.

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \quad (12)$$

証明は次のようにすればよい。

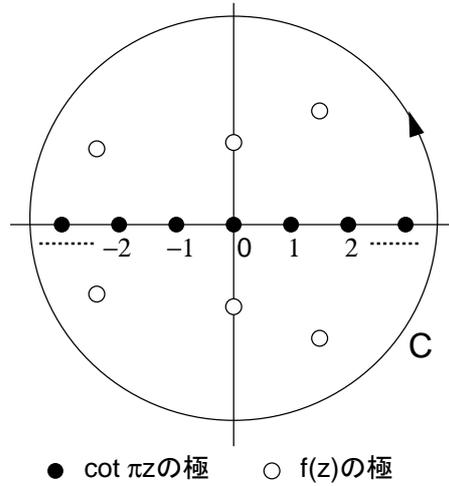
(a) 一般に

$$f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} (f(n) + f(-n)) = -\pi \sum_k A_k \cot \pi \alpha_k \quad (13)$$

が成り立つことを示せ。ただし、 $\alpha_k$  は  $f(z)$  の 1 位の極で  $A_k$  はそこでの  $f(z)$  の留数である。また  $f(z)$  はこれらの極をのぞいて解析的であり、

$\lim_{z \rightarrow \infty} |zf(z)| \rightarrow 0$  とする。

(ヒント： $\cot z f(z)$  を複素平面の十分大きな半径の円周上で積分。)



- (b)  $f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$  ととって、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2}$  を求めよ。
- (c)  $a \rightarrow 0$  の極限をとることにより  $\zeta(2)$  を求めよ。
- (d) 同様にして  $\zeta(4)$  を求めてみよ。
2. 他にも  $\zeta(3) \simeq 1.202$ 、 $\zeta(3/2) \simeq 2.612$ 、 $\zeta(5/2) \simeq 1.3415$  などが出てくるが、これらは解析的に値を求めることはできない。パソコンなどを用いて数値的に値を求めることを試みて見よ。また、 $\zeta(2)$  や  $\zeta(4)$  についても数値計算をして、厳密な値と比較して見よ。数値計算にあたっては、どの公式を使うのが効率がいいか、 $z$  の値によって収束の速さはどう変わるかなど考察してみよ。(一般の実数の  $z$  に対するプログラムを作って、 $z = 2$  や  $z = 4$  で信頼性をチェックして他の点の値を求めるとよい。)