

統計力学II 演習問題IV

1. 3次元の理想ボーズ気体について次の問に答えよ。ただし、粒子の質量を m 、粒子数を N 、体積を V 、スピンは持たないものとする。
 - (a) 1粒子状態密度 $D(\epsilon)$ を求めよ
 - (b) ボーズアインシュタイン凝縮の臨界温度 T_c を求めよ。
 - (c) 温度 $T < T_c$ で、エネルギー 0 の状態に落ち込んでいる粒子の数 N_0 を求め、その温度依存性の概略を図示せよ。
 - (d) 温度 $T < T_c$ での、定積比熱 C を求め、その温度依存性の概略を図示せよ。
 - (e) ^4He ガス (原子数密度 2×10^{28} 個/ m^3)、 ^{87}Rb ガス (原子数密度 2×10^{28} 個/ m^3) を 3次元の理想ボーズ気体と考えたとき、それぞれの臨界温度を求めよ。

2. 1次元、2次元の理想ボーズ気体について
 - (a) それぞれ単位長さ・面積あたりの1粒子状態密度 $D(\epsilon)$ を求め、 ϵ の関数として概略を図示せよ
 - (b) ボーズ・アインシュタイン凝縮が起きるかどうかが判定し、起きる場合は臨界温度を求めよ。

3. 次の関数 $\phi(z, s)$ を変形されたツェータ関数 (アペル関数) と呼ぶ。

$$\phi(z, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n^z},$$

これについて、次の関係を証明せよ。

$$\begin{aligned} \phi(z, 1) &= \zeta(z), \quad (\zeta(z) \text{ は Riemann のツェータ関数}) \\ \phi(z, e^y) &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1} dx}{e^{x-y} - 1}, \quad (\text{積分表示}) \\ \frac{\partial \phi(z, e^y)}{\partial y} &= \phi(z-1, e^y), \end{aligned}$$

4. (a) 3次元の理想ボーズ気体の $T > T_c$ での熱容量が前問の $\phi(z, s)$ を用い、 $s = e^{\beta\mu}$ をパラメータとして次の式で与えられることを示せ。

$$c = \frac{C}{Nk_B} = \frac{3}{4} \left\{ \frac{5\phi(5/2, s)}{\phi(3/2, s)} - \frac{3\phi(3/2, s)}{\phi(1/2, s)} \right\} \quad (1)$$

$$t = \frac{T}{T_c} = \left(\frac{\phi(3/2, 1)}{\phi(3/2, s)} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (2)$$

- (b) 熱容量が $T = T_c$ の上下で連続であることを示せ。
- (c) 公式 (1)(2) を用いて数値計算することにより、全温度領域にわたって c と t の関係を正確に図示せよ。プログラミング言語・グラフ作成ソフトは各自得意なものを用いよ。
5. 実際の ^{87}Rb のボーズ凝縮の実験では、 ^{87}Rb ガスは 3 次元の調和ポテンシャルによって空間的に閉じこめられている。粒子数を N 、調和振動の振動数を ω とし、以下の問いに答えよ。ただし、 $\hbar\omega \ll k_B T$ とし、励起状態については和を積分に直してよい。
- (a) 1 粒子状態密度 $D(\epsilon)$ を求めよ。
- (b) 臨界温度 T_c を求めよ。
- (c) 温度 $T (< T_c)$ で、基底状態に落ち込んでいる原子の数 N_0 を求めよ。
- (d) $\omega = 2\pi\nu$ とする。 $\nu = 200\text{Hz}$ のとき、 $T_c = 1\mu\text{K}$ になるためには、何個の原子を閉じ込める必要があるか。
6. 3 次元の理想フェルミ気体について次の問いに答えよ。ただし、粒子の質量を m 、粒子数を N 、体積を V とし、一つ一つの粒子はスピン量子数 $S = 1/2$ のスピン S を持ち、 $S_z = \pm 1/2$ の二つの状態をとるとする。
- (a) フェルミ波数 k_F 、フェルミ速度 v_F 、フェルミエネルギー ϵ_F 、フェルミ温度 T_F を求めよ。
- (b) 絶対零度での内部エネルギー E_0 、圧力 p を求め、体積弾性率 $K = -V \frac{\partial p}{\partial V}$ を求めよ。
- (c) 金属ナトリウムではナトリウムイオン 1 個当たり 1 個の自由電子が存在する。この自由電子を理想フェルミ気体と考え、フェルミ速度、フェルミ温度を金属ナトリウムについて評価せよ。また、体積弾性率の値を評価し、実験値と比較せよ。必要な値は各自調べること。
7. 白色矮星ではフェルミ縮退した電子の圧力が重力による崩壊を支えている。重力エネルギーについては核子の寄与が重要で電子の重力エネルギーは無視できる。太陽と同じくらいの質量の白色矮星について、電子ガスを理想フェルミ気体と考えて、エネルギーを最小とする半径、密度、フェルミエネルギーがそれぞれどの程度か評価せよ。なお、白色矮星中の電子と陽子の数は等しく、中性子の数もほぼ等しいとする。
8. 超相対論的 ($mc^2 \ll c|p|$) フェルミ粒子について、フェルミエネルギー ϵ_F 、絶対零度での内部エネルギー E_0 を求めよ。白色矮星中の電子がこのような状態にあるとするとどのようなことが起きるか考察せよ。なお、核子の重力エネルギーについては非相対論的取り扱いでよいものとする。