

## 統計力学II 演習問題III

- (\*) 理想フェルミ気体について、次の物理量の表式を導け。ただし、 $\alpha$  番目の 1 粒子状態  $|\alpha\rangle$  の 1 粒子エネルギーを  $\epsilon_\alpha$ 、化学ポテンシャルを  $\mu$  とする。
  - 大分配関数  $\Xi$
  - グランドポテンシャル  $J$
  - 1 粒子分布関数  $n_\alpha$  (1 粒子状態  $|\alpha\rangle$  にある粒子数の期待値)
  - 全粒子数  $N$ 、内部エネルギー  $U$  の期待値
- (\*) 理想ボーズ気体について前問と同じ物理量の表式を導け。
- 1、2 で求めた  $J$  の表式に基づき、理想フェルミ気体、理想ボーズ気体のエントロピー  $S$  が次式で与えられる事を示せ。  $n_\alpha$  はそれぞれフェルミ分布関数、ボーズ分布関数である。

$$S = - \sum_{\alpha} \{ (1 - n_{\alpha}) \ln(1 - n_{\alpha}) + n_{\alpha} \ln n_{\alpha} \}, \quad \text{フェルミ粒子}$$

$$S = \sum_{\alpha} \{ (1 + n_{\alpha}) \ln(1 + n_{\alpha}) - n_{\alpha} \ln n_{\alpha} \}, \quad \text{ボーズ粒子}$$

- 理想フェルミ気体、理想ボーズ気体のエントロピーをアンサンブルの考え方をい次の手順で導くことを考える。

$\mathcal{N}$  個の同等な系のアンサンブルを考える。それぞれの系は同じ 1 粒子状態  $|\alpha\rangle$ 、1 粒子エネルギー  $\epsilon_\alpha$  を持っているとする ( $\alpha$  は 1 粒子状態の番号)。

- $\mathcal{N}_\alpha$  個のフェルミ粒子を  $\mathcal{N}$  個の系の  $\alpha$  番目の 1 粒子状態に分配する方法の数  $W_F(\mathcal{N}, \mathcal{N}_\alpha)$  を求めよ。

- $\mathcal{N}_\alpha$  個のボーズ粒子を  $\mathcal{N}$  個の系の  $\alpha$  番目の 1 粒子状態に分配する方法の数  $W_B(\mathcal{N}, \mathcal{N}_\alpha)$  を求めよ。

- $n_\alpha = \mathcal{N}_\alpha / \mathcal{N}$  がそのアンサンブルでの  $|\alpha\rangle$  の粒子数の期待値と考えられる。 $\mathcal{N}, \mathcal{N}_\alpha \gg 1$  として、1 つの系あたりのエントロピー  $S$  を  $n_\alpha$  を用いて表し、前問の結果と一致することを確認せよ。

- グランドポテンシャル  $J = U - TS - \mu N$  を最小化するように  $n_\alpha$  を定めることにより、フェルミ分布、ボーズ分布を導け。ただし、 $U$ 、 $N$  はそれぞれ一つの系の内部エネルギー、粒子数の期待値である。

5. 理想フェルミ気体、理想ボーズ気体において、各 1 粒子状態の粒子数  $\hat{n}_\alpha$  の揺らぎについて以下の関係がなりたつことを示せ

$$\langle (\hat{n}_\alpha - \langle \hat{n}_\alpha \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{n}_\alpha \rangle (1 \pm \langle \hat{n}_\alpha \rangle) \quad + \text{はボーズ粒子、} - \text{はフェルミ粒子}$$

なお、ここでは  $\hat{n}_\alpha$  は整数値をとる粒子数そのものを表し、その期待値  $\langle \hat{n}_\alpha \rangle$  がフェルミ分布関数やボーズ分布関数 (1 粒子分布関数)  $n_\alpha$  となる。

6. 理想フェルミ気体、理想ボーズ気体について希薄極限 ( $n_{\mathbf{k}} \ll 1$ ) において

(a) 古典的な Maxwell-Boltzmann の速度分布関数

$$f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m}{2k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right] dv_x dv_y dv_z$$

が得られることを示せ。

(b)  $J = -pV$  の表式を用い、古典理想気体の状態方程式を再現することを示せ。

(c) 問 3,4 の表式を用い、古典理想気体のエントロピーの表式を再現することを示せ。

(d) すべての波数について、希薄極限 (すなわち古典極限) が成り立つための温度  $T$  に対する条件は、古典理想気体のエントロピーが正である条件と同等であることを示せ。

(e) この条件は  $k_B T$  くらいエネルギーを持つ粒子のドブロイ波長 (熱的ドブロイ波長  $\lambda_T$ ) が原子の平均間隔程度より小さくなる条件であることを示し、このことの物理的意味を説明せよ。

7. 波数  $k$  の光子を、エネルギー  $\hbar\omega_{\mathbf{k}} = \hbar c |\mathbf{k}|$  ( $c$ : 光速) をもつボーズ粒子と考える空腔輻射 (光子気体) を取り扱う。

(a) 光子の化学ポテンシャルは 0 である。その理由を説明せよ。

(b) ボーズ分布関数からプランクの輻射公式を導け。

8. 分散関係  $\epsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4}$  をもつ相対論的自由粒子について、

(a) 単位体積あたりの 1 粒子状態密度  $D(\epsilon)$  を求めよ。特に  $|\mathbf{p}| \ll mc$ 、 $|\mathbf{p}| \gg mc$  の極限でどのように振る舞うか調べ、全領域で  $\epsilon$  の関数として概略を図示せよ。

(b) このようなボーズ粒子からなる理想気体の化学ポテンシャルの最大値はいくらか。