

統計力学II 演習問題I

- N_A 個の質量 m_A の単原子分子 A からなる理想気体と N_B 個の質量 m_B の単原子分子 B からなる理想気体が体積 V の箱の可動な透熱壁で仕切られた左右の領域に閉じこめられて温度 T の熱平衡状態にある。
 - 左右の圧力が釣り合っているとき、A の占める体積 V_A と B の占める体積 V_B を求めよ。またその時の圧力 p_i を求めよ。
 - この状態でのエントロピー S_i を求めよ。
 - 仕切りを取り去ると、A と B が一様に混じり合った状態になった。この状態での分配関数 Z_f 、内部エネルギー U_f 、自由エネルギー F_f 、圧力 p_f 、エントロピー S_f を求めよ。
 - 仕切りを取り去ったことによるエントロピー変化 $\Delta S = S_f - S_i$ を求め、A のモル分率 $c = \frac{N_A}{N_A + N_B}$ を用いて表せ。
- 圧力 p 一定のカノニカル分布で、古典単原子理想気体を考える。
 - 分配関数 $Y(T, p)$ を求めよ。($H = E + pV$ をエネルギーとしてカノニカル分布を適用する。 V を固定した分配関数 $Z(T, V)$ に $e^{-\beta pV}$ をかけて V で積分するとよい。なお、 $Z(T, V)$ の表式は既知としてよい。)
 - $Y(T, p)$ を用いて状態方程式を求めよ。
 - $Y(T, p)$ を用いて定圧熱容量 C_p を求めよ。
- 地上近くに高さ h 、底面が $L \times L$ の正方形の柱状領域に質量 m の単原子理想気体が閉じ込められ、温度 T の熱平衡状態にある。原子に働く重力の効果を検討し以下の問に答えよ。
 - 分配関数 Z 、自由エネルギー F 、内部エネルギー U を求めよ
 - 熱容量 C の表式を求めよ
 - 高温及び低温での熱容量を求めよ。
- 超相対論的粒子 (静止質量を無視できるほど高エネルギーの粒子) N 個からなる古典単原子理想気体の分配関数 Z 、自由エネルギー F 、内部エネルギー U 、定積熱容量 C_V を求めよ。
- N 個の 互いに区別できない 質量 m の単原子分子が一つの調和ポテンシャル $V(\mathbf{r}) = \frac{m\omega^2}{2} r^2$ の中に閉じ込められている。この系を古典統計力学で考える。
 - 分配関数 Z を求め、自由エネルギー F 、内部エネルギー U 、熱容量 C を求めよ。
 - $R \equiv \sqrt{\langle r_i^2 \rangle}$ を求めよ (r_i は i 番目の粒子の座標)。
 - R を系の半径と見なしたとき、自由エネルギーが示量的であることを示せ。(前問の R の表式を用い自由エネルギーの表式から ω を消去せよ。)
- N 個の質量 m 、慣性モーメント I の 2 原子分子が体積 V の箱の中に閉じこめられて温度 T の熱平衡状態にある。分子間の相互作用、分子の振動は無視する。
 - 分配関数 Z は 1 分子あたりの重心運動の分配関数 z_t と回転運動の分配関数 z_{rot} を

使って

$$Z = \frac{1}{N!} z_t^N z_{\text{rot}}^N$$

で与えられることを示せ。定積熱容量 C_V は重心運動の寄与 C_t と回転運動の寄与 C_{rot} の和で与えられる事を説明せよ。

- (b) 各分子の重心周りの回転運動を量子力学的に考える。角運動量の量子数が $\ell (= 0, 1, 2, \dots)$ の固有状態で回転運動のエネルギーは

$$E(\ell) = \frac{\hbar^2 \ell(\ell + 1)}{2I}$$

で与えられる。このとき、 z_{rot} 、 C_{rot} の表式を求めよ。なお、角運動量 ℓ の状態は $2\ell + 1$ 重に縮退していることに注意せよ。

- (c) 十分高温では、 z_{rot} が古典的に求めたもの (統計力学 I 演習 IV の 1 参照) に近づくことを確かめ、 C_{rot} の近似式を求めよ。
(d) 十分低温での分配関数 z_{rot} の近似式を求め、 C_{rot} の近似式を求めよ。
(e) 上の二つの極限での振る舞いから、 C_{rot} の全温度領域での振る舞いの概略を推測して図示せよ。できれば、全温度領域にわたって数値計算を行い、推測と同じ振る舞いをしているか確かめよ。

7. N 個の長さ a のミクロな要素からなる 1 次元的な鎖を考える。それぞれの要素は両端で隣の要素とつながっているが、その間の角度は任意の値をとり得るとし、エネルギーはその角度によらないものとする。(統計力学 I 試験問題 2(b))

- (a) 張力 X が与えられたとして、 $X =$ 一定のカノニカル分布の考え方で長さ L の期待値を求めよ。
(b) $X \rightarrow 0$ と $X \rightarrow \infty$ での L の振る舞いを調べ、 L の X 依存性の概略を図示せよ。

8. 統計力学 I 演習問題 V の 3 のような系で、不純物や構造の乱れなど、系に内在するランダムネスのために、 J が次の確率で分布している場合を考える。

$$P(J) = \begin{cases} 1/J_0 & \text{for } -J_0 p < J < J_0(1-p) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

($0 \leq p \leq 1, J_0 > 0$ とする) ここで J が J と $J + dJ$ の間にある確率を $P(J)dJ$ とした。計算には統計力学 I 演習問題 V の 3 の結果を利用してよい。

- (a) 磁場がないときの熱容量 C および帯磁率 χ の表式を求めよ。
(b) C 、 χ の低温 $k_B T \ll J_0$ 、高温 $k_B T \gg J_0$ での振る舞いを調べよ。 $p = 0$ の場合とそれ以外の場合の違いに注意し、それぞれの極限でもっとも重要になる寄与のみを求めること。その結果を基に C と χ の温度依存性の概略を図示せよ。なお、収束して $O(1)$ の定数になる解析的に計算できない積分の具体的な値は計算しなくていいが、それぞれの極限で収束することを確認し、収束する積分のみを用いて表すこと。できれば、解析的に計算できないが収束する積分の値はコンピュータを用いて数値的に評価してみることが望ましい。