

統計力学 演習問題 VII

1. 固体中には格子振動以外にも様々な振動モードが存在する。今、一辺 L の 3 次元の固体結晶内で波数 k と振動数 ω の関係 (分散関係) が $\omega = Ak^2 (A > 0)$ で与えられるモードがあるとする。自由度の総数を N とするとき
 - (a) 単位体積あたりの状態密度 $D(\omega)$ を求め、許される振動数の上限 ω_D を求めよ。
 - (b) 熱容量の表式を求めよ。
 - (c) 熱容量の低温・高温での振る舞いを調べ、全温度領域での熱容量の温度依存性の概略を図示せよ
2. 一辺 L の 3 次元の固体結晶内で分散関係が $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + c^2k^2} (c, \omega_0 > 0)$ で与えられるモードがあるとする。自由度の総数を N とするとき
 - (a) 単位体積あたりの状態密度 $D(\omega)$ を求め、許される振動数の上限 ω_D を求めよ。
 - (b) 熱容量の表式を求めよ。
 - (c) $\omega_D \gg \omega_0 > 0$ のとき、低温 ($k_B T \ll \hbar\omega_0$)、中間温度 ($\hbar\omega_0 \ll k_B T \ll \hbar\omega_D$)、高温 ($k_B T \gg \hbar\omega_D$) での熱容量の振る舞いを調べ、全温度領域での温度依存性の概略を図示せよ。
3. (*) 一辺 L の立方体の形をした体積 $V (= L^3)$ の空洞の中の電磁波の統計力学を考える。
 - (a) この空洞中の電磁波は、様々な波数ベクトル k を持ったモードの重ね合わせとして表せる。振動数が $\omega \sim \omega + d\omega$ の間にある単位体積あたりのモードの状態密度 $D(\omega)d\omega$ を求めよ。ただし、光速を c とする。
 - (b) 振動数が $\omega \sim \omega + d\omega$ の間にあるモードの持つ単位体積あたりのエネルギー密度 $u(\omega)d\omega$ を求めよ (プランクの輻射公式)。
 - (c) 高振動数および低振動数の極限での $u(\omega)$ の近似式を求めよ。また、 $u(\omega)$ が最大になる ω のおおよその値を評価せよ。その結果を用いて $u(\omega)$ を ω の関数として概略を図示せよ。
 - (d) この系の単位体積当たりの内部エネルギー U 、比熱 C 、圧力 p の表式を求めよ。ただし、零点エネルギーは考慮しなくてよい。
4. プランクの輻射公式を波長についてのエネルギー分布を示す形に書き換える事を考える

- (a) 波長が $\lambda \sim \lambda + d\lambda$ の間にあるモードの持つ単位体積あたりのエネルギー密度 $\tilde{u}(\lambda)d\lambda$ を求めよ。
- (b) 長波長および短波長の極限での $\tilde{u}(\lambda)$ の近似式を求めよ。また、 $\tilde{u}(\lambda)$ が最大になる λ のおおよその値を評価せよ。その結果を用いて $\tilde{u}(\lambda)$ を λ の関数として概略を図示せよ。
5. 宇宙の始まりからほぼ 38 万年後、宇宙の温度が下がるにつれそれまで電離していた電子と陽子が原子状態になり、ほとんど電磁波を散乱しなくなった（宇宙の晴れ上がり）。この時点で電磁波はその時の宇宙の温度のプランクの輻射公式に従うと考えられる。その後の宇宙の膨張に伴って宇宙の半径が A 倍になるとそれぞれのモードの電磁波の波長もそれに伴って A 倍されると考えるとき、最初温度 T のプランク分布をしていた電磁波は温度 T/A のプランクの輻射公式に従うことを示せ。また、現在観測される宇宙からの電磁波（宇宙背景輻射）は 2.73[K] のプランクの輻射公式に従う。このことから宇宙の晴れ上がりから現在までに宇宙が大体何倍ほどに膨張したかを評価せよ。
6. 空洞中の電磁波が温度 T の熱平衡状態にあるとき、この空洞に断面積 a の微小な穴をあけたとする。このとき、単位時間に穴から出てくる電磁波のエネルギーは $\frac{Uca}{4}$ であることを示せ。ただし、 U は 3 で求めた単位体積あたりの内部エネルギー、 c は光速である。
7. 太陽から放射される電磁波のエネルギーを地球上で観測すると $1[\text{m}^2]$ あたり $1.36 \times 10^3[\text{W}]$ である。太陽の輻射を近似的に熱平衡状態の空洞輻射と考え、太陽と地球の距離を $1.5 \times 10^{11}[\text{m}]$ 、太陽の半径を $7 \times 10^8[\text{m}]$ として、太陽の表面の温度がどの程度か評価せよ。
8. 磁場のない時は磁化の期待値が 0 になるような磁性体（常磁性体）を考える。ただし、磁場のない時の磁性体のハミルトニアン \mathcal{H} と磁化 M の演算子は交換可能（同時対角化可能）であり、エネルギー E_i をもつハミルトニアンの固有状態 $|i\rangle$ において磁化も定まった値 M_i をとるものとする。
- (a) 磁場のない時のカノニカルアンサンブルでの磁化 M の揺らぎ $\langle M^2 \rangle$ と帯磁率 $\chi (\equiv \lim_{H \rightarrow 0} \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial H})$ の間に $\chi = \frac{1}{k_B T} \langle M^2 \rangle$ という関係が成り立つことを示せ。
- (b) N 個の独立なスピン S の磁性原子からなる常磁性体に対し、前問の公式を用いて帯磁率を計算し、以前に求めた結果と等しいことを確かめよ。
- 公式： $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ を用いてよい。