

## 統計力学 I 演習問題 II

1.  $\Gamma$  関数  $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$  について  
 (a)  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  を示し、 $\Gamma(N+1) = N!$  ( $N$  は非負の整数) を示せ  
 (b)  $N \gg 1$  のとき  $\ln N! \simeq N \ln N - N + \ln \sqrt{2\pi N}$  (スターリングの公式) を示せ
2. 次の積分公式を証明せよ。ただし、 $a > 0$  とする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-ax^2} dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

3. (\*)

(a) 確率変数  $\hat{u}$  の分散  $\langle (\Delta \hat{u})^2 \rangle \equiv \langle (\hat{u} - \langle \hat{u} \rangle)^2 \rangle$  が  $\langle (\Delta \hat{u})^2 \rangle = \langle \hat{u}^2 \rangle - \langle \hat{u} \rangle^2$  と書けることを示せ。

(b)  $N$  個の独立な確率変数  $\hat{u}_i (i = 1, \dots, N)$  がすべて期待値  $\langle \hat{u}_i \rangle = a_0$ 、標準偏差  $\sqrt{\langle (\Delta \hat{u}_i)^2 \rangle} = \sigma_0$  を満たすとき、確率変数  $\hat{u} = \sum_{i=1}^N \hat{u}_i$  の期待値  $a \equiv \langle \hat{u} \rangle$  と標準偏差  $\sigma \equiv \sqrt{\langle (\Delta \hat{u})^2 \rangle}$  を求めよ。

(c)  $N$  が大きいとき  $a, \sigma$  はどのような値に近づくか。そのことはどういうことを意味しているか。

4. Gauss 分布  $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_0^2}}$  に対し、次の関係を示せ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1, \quad \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x P(x) dx = x_0$$

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 P(x) dx = \sigma_0^2$$

5. 2つの独立な確率変数  $\hat{x}_1, \hat{x}_2$  の確率密度関数が共に  $p(x_1), p(x_2)$  で与えられるとき、確率変数  $\hat{X} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$  の確率密度関数  $P(X)$  は

$$P(X) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1) p(X - x_1) dx_1$$

で与えられることを示し、 $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}$  のとき、具体的に  $P(X)$  を計算せよ。

6. 前問の計算を確率変数が  $N$  個 ( $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N$ ) ある時に拡張せよ。 ( $\hat{X} = \sum_{i=1}^N \hat{x}_i$ )

7.  $N$  個の独立な確率変数  $\hat{x}_i (i = 1, \dots, N)$  を考える。 $\hat{x}_i$  は確率  $p$  で 1、確率  $q = 1 - p$  で 0 の値をとり、他の値はとらないものとする。(具体的な例としては、 $N$  個の原子があるとき、一つ一つの原子の状態が 2 とおりあるとして、それぞれの状態で 0 と 1 の値をとる物理量を  $\hat{x}_i$  と考えればよい。この例では  $i$  は原子につけた番号である。)

(a) このとき、 $\hat{x}_i$  の期待値  $\langle \hat{x}_i \rangle$  と分散  $\langle (\hat{x}_i - \langle \hat{x}_i \rangle)^2 \rangle$ 、及び、和  $\hat{s}_N = \sum_{i=1}^N \hat{x}_i$  の期待値  $m = \langle \hat{s}_N \rangle$  と分散  $\sigma_N^2 = \langle (\hat{s}_N - m)^2 \rangle$  を求めよ。

(b)  $\hat{s}_N$  が  $n$  という値をとる確率  $P_N(n)$  が二項分布

$$P_N(n) = \frac{N!}{(N-n)!n!} p^n q^{N-n}$$

であたえられることを示せ。(  $\hat{s}_N$  は 1 という値をとっている  $\hat{x}_i$  の数に等しいことに注意せよ )

(c)  $N$  が十分大きいとき、

$$P_N(n) = \sqrt{\frac{1}{2\pi N x(1-x)}} \exp [N(-x \ln(x/p) - (1-x) \ln((1-x)/q))] ]$$

を示せ。ただし、 $x = n/N$ 。

(d)  $N$  が十分大きいとき、確率変数  $\hat{x} = \hat{s}_N/N$  は、連続的な確率変数と見なせる。このとき、 $\hat{x}$  の期待値  $a = \langle \hat{x} \rangle$  と分散  $\sigma^2 = \langle (\hat{x} - a)^2 \rangle$  を求めよ。また、 $\hat{x}$  が  $x$  と  $x + dx$  の間の値をとる確率を  $P(x)dx$  と書くとき、確率密度  $P(x)$  が

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

で与えられることを示せ。

(e)  $p = q = 1/2$  として、 $N = 3, 4, 5 \dots$  に対し、 $n = 0 \sim N$  について二項分布  $P_N(n)$  を計算し、図示せよ。(できれば、パソコン等でプログラムを組んで、大きい  $N$  に対しても作図してみよ。)

8.  $D$  次元単位球の表面積  $S_D$  は、

$$S_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \quad (1)$$

で与えられることを次のようにして証明せよ。

(a)  $S_D$  が与えられたとき、 $D$  次元の半径  $r$  の球の表面積は  $S_D r^{D-1}$  となる。この理由を説明せよ。

(b)  $D$  重積分

$$I_D = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_D^2)\} dx_1 dx_2 \dots dx_D$$

を、次の二つの方法で計算する。

i. そのままガウス積分を実行する。

ii.  $D$  次元の球座標で積分する。このとき、 $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_D^2$  とおくと、被積分関数は  $r$  のみの関数である事、及び、 $r \sim r + dr$  の間の超球殻の体積は  $S_D r^{D-1} dr$  であることに注意し、結果を  $S_D$  を用いて表せ。

(c) 二つの計算を比較して  $S_D$  を求めよ。