

統計力学I演習問題I (2017年度・第1回)

1. 熱力学の知識に基づき次の関係を証明せよ。なお、問題ではあえて省略してあるがそれぞれの熱力学的関数の独立変数を明記せよ。

(a) $dF = -SdT - pdV + \mu dN,$

(b) $U = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T} \right) \Big|_{V,N}$

(c) 定積熱容量: $C_V = \frac{\partial U}{\partial T} \Big|_{V,N} = T \frac{\partial S}{\partial T} \Big|_{V,N} = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \Big|_{V,N}$

定圧熱容量: $C_p = \frac{\partial H}{\partial T} \Big|_{p,N} = T \frac{\partial S}{\partial T} \Big|_{p,N} = -T \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \Big|_{p,N}$

ただし、 U : 内部エネルギー、 F : ヘルムホルツの自由エネルギー

G : ギブスの自由エネルギー、 S : エントロピー、 H : エンタルピー

T : 絶対温度、 p : 圧力、 V : 体積、 μ : 化学ポテンシャル、 N : 粒子数

2. 単原子理想気体についてこれまでに学んだ知識に基づき次の問に答えよ。

(a) 定積熱容量、定圧熱容量を求めよ。

(b) 準静的断熱過程において温度と体積の関係を求めよ。

(c) 単原子理想気体を用いたカルノーサイクルの効率を求め、理想気体温度と熱力学的温度が等しいことを示せ。

3. (a) 理想気体の状態方程式から、ヘルムホルツの自由エネルギーが

$$F(T, V) = -NRT \ln \frac{V}{V_0(T)}$$

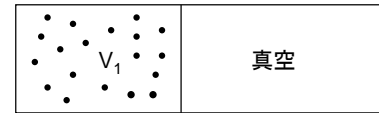
の形に与えられることを示せ。ただし、 $V_0(T)$ は一般には温度に依存する定数である。

(b) 理想気体の定積熱容量 C_V は温度によらない定数である。このことを用いて $V_0(T)$ の温度依存性を定め、 $F(T, V)$ の表式を求めよ。ただし、 $T \rightarrow 0$ で $F \rightarrow 0$ とする。最終的には一つの未知定数を含む形に求めよ（この未知定数は統計力学を用いないと決まらないので決めなくてよい）。

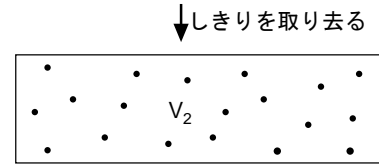
(c) エントロピーの表式を求めよ。

4. N モルの温度 T の理想気体を、図のような自由断熱膨張により体積 V_1 から $V_2 (> V_1)$ まで膨張させた。この時のエントロピー変化 ΔS を次の二つの方法で求め、 $\Delta S > 0$ を示せ。

(a) 前問で求めた理想気体のエントロピーの差を求める。



(b) 同じ変化を準静的に起こさせることを考え、エントロピーの積分表示(クラウジウスの関係)を用いる。



5. 古典的な1次元の調和振動子の位相空間での運動を考える。ただし、質量を m 、固有振動数を ω とする。

(a) ハミルトニアンから運動方程式を導け。

(b) 位相空間での調和振動子のエネルギー E を持つ位相点 $(q(t), p(t))$ の軌跡を描き、運動の向きも明示せよ。

(c) エネルギー E を持つ位相点の軌跡が位相空間で取り囲む面積 $S = \oint pdq$ を求めよ。

(d) $E = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$ と量子化されるとき、 S の取り得る値を求めよ。

6. 質量 m の自由粒子が長さ L の1次元的な領域に閉じこめられている。

(a) この粒子のエネルギー一定 ($= E$ とする) の状態の波動関数 $\psi(x)$ に対する、シュレーディンガー方程式を書き、その解が $\psi_p(x) = C \exp(ipx/\hbar)$ で与えられることを示し、 C を波動関数の規格化から決定せよ。また、 p と E の関係はどうなるか。

(b) 周期的境界条件 $\psi_p(x) = \psi_p(x + L)$ を仮定して、 p の満たす条件を求めよ。又、 E はどのように与えられるか。

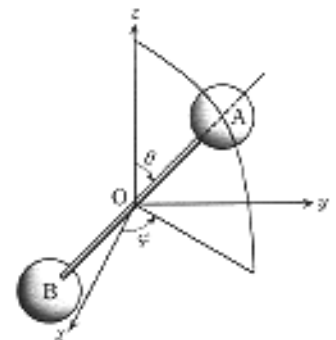
(c) 同じ問題を古典力学で考えたとき、位相空間 $(-\infty < p < \infty, 0 \leq q \leq L)$ での質点の位相点 $(q(t), p(t))$ の軌跡を描け。(運動の向きも明示せよ)

(d) 古典軌道の1周期についての積分 $S = \oint pdq$ を計算し、 p が(b)の条件を満たすとき、 S の取り得る値を求めよ。

7. 2つの質量 m の原子 A、B からなる2原子分子の回転運動を考える。二つの原子の間の距離は a とし、それぞれの原子は質点と見なしてよいものとする。

(a) 慣性モーメント I を求めよ。以下の問題の最後の答えは m や a でなく、 I を用いて表すこと。

(b) 図のように z 軸まわりの回転角 φ と z 軸からの傾き角 θ で原子の回転運動を記述するとき、回転運動のエネルギーの表式を求め、ラグランジアンを求めよ。



(c) θ と φ に共役な運動量 p_θ 、 p_φ を求め、回転運動のハミルトニアンを求めよ。