

統計力学Ⅰ試験問題 (2017.8.4)

- それぞれの問題に対し別の解答用紙を用いよ。
- 解答用紙の裏を使うときは表にその旨を明記すること。
- 整理の都合上、白紙でも2枚とも提出してください。

以下の問題ではボルツマン定数を k_B と書く。また、 $N \gg 1$ とする。

1. N 個の調和振動子からなる系

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q_i^2}{2} \right\}$$

を考える。

- (a) 古典力学的に考えて分配関数 Z_c を求め、内部エネルギー U_c 、熱容量 C_c を求めよ。
- (b) 量子力学的に考えると、一つ一つの調和振動子のエネルギーは量子化され、固有エネルギーは次のように表される。

$$E = \sum_{i=1}^N \hbar\omega \left(n_i + \frac{1}{2} \right), \quad (n_i = 0, 1, 2, \dots, \infty)$$

このとき、分配関数 Z_q を求め、内部エネルギー U_q 、熱容量 C_q を求めよ。

- (c) $k_B T \gg \hbar\omega$ 、 $k_B T \ll \hbar\omega$ それぞれの場合の熱容量 C_q の振る舞いを調べ、温度依存性の概略を図示せよ。
- (d) ω が一定でなく、次のような単位体積あたりの状態密度 $D(\omega)$ を持つモードの集団である場合を考える。

$$D(\omega) = \begin{cases} D_0 (= \text{定数}) & 0 < \omega < \omega_D \\ 0 & \omega > \omega_D \end{cases}$$

すなわち、 ω と $\omega + d\omega$ の間の振動数を持つモードの数は $VD(\omega)d\omega$ である。モードの総数を N とする。このとき、 ω_D を決定し、量子力学的に熱容量 C の表式を求めよ。さらに、 $k_B T \gg \hbar\omega_D$ 、 $k_B T \ll \hbar\omega_D$ それぞれの場合の熱容量 C の振る舞いを調べ、温度依存性の概略を図示せよ。必要なら

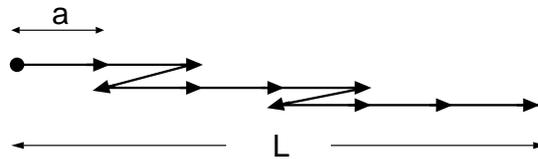
$$\zeta(n) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{e^t - 1} dt = \frac{1}{n!} \int_0^\infty \frac{t^n e^t}{(e^t - 1)^2} dt$$

を用いよ。なお、 ζ -関数の値は計算しなくてよい。

裏にも問題があります

2. $N(\gg 1)$ 個の長さ a の単量体からなる 1 次元的な鎖を考える。それぞれの単量体は両端で隣の単量体とつながっているが、各単量体のエネルギーは向きに依存しないものとし、0 とおいて良い。

(a) 図のように単量体間の角度は 0 度または 180 度しか取れないものとして、以下の問に答えよ



- i. 張力 X がかかっているとき、 $X =$ 一定のカノニカル分布の考え方で長さの期待値 L を求めよ。(ミクロカノニカル分布の方がやりやすければそれでやってもよい)
- ii. $X \rightarrow 0$ と $X \rightarrow \infty$ での L の近似式を求めよ。
- iii. 温度を一定にしたとき、 L の X 依存性の概略を図示せよ。また、温度が変わると曲線全体がどう変わるか、1 枚の図の中に、異なる温度での曲線を描いて説明せよ。

(b) 各単量体は 3 次元的に自由な方向を向けるものとして、(a)i,ii の問に答えよ。