

統計力学II 試験問題 2017. 2. 3

- 2 題それぞれ別の解答用紙を用いること。
- 解答用紙の裏を使うときは表にその旨を明記すること。
- 整理の都合上、白紙でも氏名等記入の上 2 枚とも提出すること。
- 答案返却を希望する者は、事前にコピーを取って保存する必要があるので、1 枚目の表右上に「返却希望」と明記すること。

1. 3次元の理想フェルミ気体について次の問に答えよ。ただし、粒子の質量を m 、粒子数を N 、体積を V とする。また、一つ一つの粒子はスピン量子数 $S = 1/2$ を持ち、 $S_z = \pm 1/2$ の二つの状態をとることができるものとする。

- (a) スピンあたり・単位体積当たりの 1 粒子状態密度 $D(\epsilon)$ を求めよ
- (b) フェルミ波数 k_F 、フェルミエネルギー ϵ_F を求めよ。
- (c) 絶対零度での内部エネルギー E_0 、圧力 p を求めよ。
- (d) 低温 $0 < k_B T \ll \epsilon_F$ での熱容量 C を求めよ。結果は $D(\epsilon_F)$ 、 k_B 、 T 、 V を用いて表すこと。なお、必要なら近似式

$$\int_0^\infty d\epsilon \frac{f(\epsilon)}{\exp[(\epsilon - \mu)/k_B T] + 1} \simeq \int_0^\mu f(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2 (k_B T)^2}{6} f'(\mu)$$

を用いてよい。ここで $f(\epsilon)$ はゆっくり変化する任意の関数。

- (e) 前問で得られた熱容量の温度依存性を物理的考察に基づき説明せよ。(数因子は考えなくてよい)
- (f) 1 粒子状態密度がフェルミ面近傍で $D(\epsilon) \sim |\epsilon - \epsilon_F|^\alpha$ ($\alpha > -1$) のように振る舞うとき、低温での比熱は T の何乗に比例するか。前問の物理的考え方に従って考えよ。

2. イジングモデルに関する次の問に答えよ

- (a) スピン 1/2 の強磁性イジングモデル

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i, j \rangle} S_i S_j \quad (S_i = \pm 1/2, J > 0)$$

について平均場近似を考える。ただし、最近接格子点の数を z 、格子点の総数を N とする。必要なら

$$\tanh x \simeq x - \frac{x^3}{3} \quad (|x| \ll 1)$$

を用いよ。

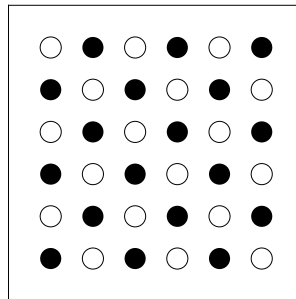
- i. i 番目のスピン S_i に対する平均場近似のハミルトニアンは $\mathcal{H}_i^{MF} = -J_z m S_i$ で与えられることを説明せよ。ただし、 $m = \langle S_i \rangle$ とする。
- ii. m の満たすべき方程式を導け
- iii. 転移温度 T_c を求めよ。
- iv. 転移温度近傍および絶対零度近傍での m と熱容量 C の温度依存性を求め、全温度領域での m と C の温度依存性の概略を図示せよ。

裏にも問題があります

- (b) 図のように二つの副格子 A (黒丸)、B (白丸) からなるイジングモデルを考える。ただし、副格子 A に属する格子点の最近接格子点は必ず副格子 B に属し、副格子 B に属する格子点の最近接格子点は必ず副格子 A に属するとし、各副格子に属する格子点の数は N とする。最近接格子点の数を z とする。副格子 A 上に $S = 1$ のスピン $S_i^A (= 0, \pm 1)$ 、副格子 B 上に $S = 1/2$ のスピン $S_i^B (= \pm 1/2)$ があるものとし、それぞれ、磁気モーメント μS_i^A 、 μS_i^B をもち、その間には反強磁性的相互作用があるものとする。磁場 H があるとき、ハミルトニアンは次式で与えられる。

$$\mathcal{H} = J \sum_{\langle ij \rangle} S_i^A S_j^B - \mu H \sum_{i=1}^N (S_i^A + S_i^B) \quad (J > 0, \langle i, j \rangle \text{ は最近接格子点の対})$$

A 副格子のスピンと B 副格子のスピンは逆向きになるうとすることに注意し、平均場近似を用いて次の問に答えよ。



- i. $H = 0$ のとき、基底状態でのスピンの配置はどのようになるか。格子の図を描いて各格子点上のスピンの向きを矢印で表せ。スピンの大きさは矢印の長さで表すこと。また、この状態での磁化 M を求めよ。
- ii. $H = 0$ のとき、各副格子のスピン期待値 $m_A = \langle S_i^A \rangle$ 、 $m_B = \langle S_i^B \rangle$ について自己無撞着方程式をたて、転移温度 T_c を求めよ。ただし、2次相転移と仮定してよい。
- iii. 転移温度以上で、磁場 H があるときの自己無撞着方程式をたて、帯磁率 χ を求めよ。
- iv. 高温 $T \gg T_c$ 及び転移点近傍 $0 < T - T_c \ll T_c$ での、 $1/\chi$ の近似式を求め、 $1/\chi$ の温度依存性の概略を図示せよ。(高温領域については T^0 のオーダーまで求めること)