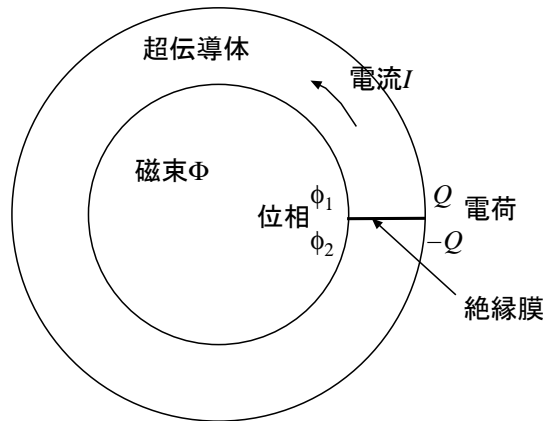


# 量子物性学 レポート問題 III

切： 8月5日(木) 飛田の居室(1519)のレポート入れ

原則として1および(または?)2を解答せよ。どちらもどうしてもできない場合は3を解答せよ。

1. 図のような環状超伝導体の1カ所に切れ目を入れてジョセフソン素子をはさんだ回路 (single junction SQUID) を考える。外部からかけられた磁場による環を貫く磁束を  $\Phi_{\text{ext}}$  とする。環を貫く磁束はそれ以外に超伝導体を流れる電流  $I$  によって作られる分  $LI$  ( $L$  は回路の自己インダクタンス) もある。この二つをあわせた磁束を  $\Phi (= \Phi_{\text{ext}} + LI)$  と書く。



- (a)  $\Phi_{\text{ext}}$  が一定なままで、電流を 0 から  $I$  まで増加させるときに、誘導起電力に抗して電流を流すために必要な仕事を計算し、環内に電流によって作られる磁束のエネルギーが  $\frac{(\Phi - \Phi_{\text{ext}})^2}{2L}$  で与えられることを示せ。
- (b) 環状超伝導体での磁束の量子化を導いた議論を参考に、 $\Phi$  とジョセフソン接合の位相差  $\phi = \phi_1 - \phi_2$  の関係を求めよ。なお、位相差は  $2\pi n$  の不定性があるが、磁束のない時  $\phi = 0$  になるように  $n$  を選ぶものとする。
- (c) ジョセフソン素子は接合エネルギー  $-U \cos \phi$  だけでなく静電容量  $C$  をもつとする。接合の両側に  $\pm Q$  の電荷がたまるとき、回路全体のハミルトニアン  $H$  を  $Q$  と  $\phi$  を用いて表せ。
- (d)  $Q$  と  $\phi$  を量子力学的な演算子と見なし、これらに正準交換関係  $[Q, \phi] = -2ei$  が成り立つとして、 $Q$ 、 $\phi$  の満たす微分方程式を求めよ。 $[A, B]$  が  $c$  数の時に成り立つ関係  $[A, F(B)] = [A, B]f'(B)$  を利用せよ。
- (e) この回路を利用して、左右対称な近似的な2重井戸系を作るには、外部からか

ける磁束  $\Phi_{\text{ext}}$  をどうとればいいか。また、 $L$ 、 $C$ 、 $U$  などが満たすべき条件や量子効果が効いてくる条件などについても考察せよ。

2. (a) Bogoliubov 変換

$$\begin{aligned}\gamma_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger &= u_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger + \sigma v_{\mathbf{k}}^* a_{-\mathbf{k}-\sigma}, \\ \gamma_{-\mathbf{k}-\sigma} &= -\sigma v_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger + u_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}-\sigma}, \\ |u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2 &= 1\end{aligned}$$

において、 $a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$ 、 $a_{\mathbf{k}\sigma}$  が電子（フェルミ粒子）の生成消滅演算子の反交換関係

$$\{a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger, a_{\mathbf{k}'\sigma'}\}_+ = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\sigma\sigma'}, \quad \{a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger, a_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger\}_+ = \{a_{\mathbf{k}\sigma}, a_{\mathbf{k}'\sigma'}\}_+ = 0 \text{ 最後の式は } \dagger \text{ なし}$$

を満たすとき、 $\gamma_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$ 、 $\gamma_{\mathbf{k}\sigma}$  も

$$\{\gamma_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger, \gamma_{\mathbf{k}'\sigma'}\}_+ = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\sigma\sigma'}, \quad \{\gamma_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger, \gamma_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger\}_+ = \{\gamma_{\mathbf{k}\sigma}, \gamma_{\mathbf{k}'\sigma'}\}_+ = 0 \text{ 最後の式は } \dagger \text{ なし}$$

を満たすことを示せ。なお、 $\sigma = 1$  はスピンの  $\uparrow$ 、 $\sigma = -1$  はスピンの  $\downarrow$  を表すとする。

(b) BCS 基底状態

$$|BCS\rangle = \prod_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger a_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger) |0\rangle, \quad |u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2 = 1$$

が任意の  $\mathbf{k}, \sigma$  に対し  $\gamma_{\mathbf{k}\sigma} |BCS\rangle = 0$  を満たすことを確かめよ。ただし、 $|0\rangle$  は電子の存在しない状態を表す。

(c) この状態において、全電子数  $N$  の期待値  $\langle N \rangle$  が  $2 \sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2$  で与えられることを示せ。また、フェルミ面近傍での状態密度を定数とすると、これが正常状態での電子数と一致することを確認せよ。ただし、講義でやった  $u_{\mathbf{k}}$  や  $v_{\mathbf{k}}$  を  $\xi_{\mathbf{k}}$  と  $\Delta$  で表す表式を使ってよい。

(d) この状態において、全電子数の期待値の周りでの揺らぎ  $\sqrt{\langle \Delta N^2 \rangle}$  ( $\Delta N = N - \langle N \rangle$ ) を  $u_{\mathbf{k}}$ 、 $v_{\mathbf{k}}$  をもちいて表し、これが  $\sqrt{N}$  のオーダーである事確かめよ。

3. 各自の専攻領域において本講義の内容に関連したテーマについて簡単にまとめよ。