

量子物性学 レポート問題 II

切： 7月8日の講義時

1. (a) GL 方程式は、凝縮体密度 ρ_0 とコヒーレンス長 ξ を用いて、次の形に書き直せることを示せ。

$$-\xi^2 \left\{ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right\} = \Psi \left[1 - \frac{|\Psi|^2}{\rho_0} \right],$$
$$\rho_0 = \frac{\alpha}{b}(T_c - T), (\alpha, b > 0), \quad \xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m\rho_0 b}$$

- (b) これを拡張すると、 xy 方向と z 方向でコヒーレンス長の異なる異方的第 2 種超伝導体に対する GL 方程式は、次の形をとる。

$$-\xi_{\perp}^2 \left\{ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right\} - \xi_{\parallel}^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \Psi \left[1 - \frac{|\Psi|^2}{\rho_0} \right], \quad (1)$$

このとき、ベクトルポテンシャル $A(\mathbf{r})$ で表される磁場があるときの GL 方程式はどうか。

- (c) (b) で、一様な磁場を z 方向にかけたときの第 2 臨界磁場 $H_{c2\parallel}$ を求めよ。

- (d) (b) で、一様な磁場を x 方向にかけたときの第 2 臨界磁場 $H_{c2\perp}$ を求めよ。

2. 運動量 \mathbf{k}, \mathbf{k}' の電子の間に次の相互作用 $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ があるとき、他に電子が存在しない空間に電子を 2 個置いた場合、電子対が形成される条件を調べよ。ただし、 L^3, m はそれぞれ系の体積、電子の質量、 $\xi_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}$ である。

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \begin{cases} -\frac{V_0}{L^3} & (|\xi_{\mathbf{k}}|, |\xi_{\mathbf{k}'}| < \omega_D) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

3. $b_{\mathbf{k}}^{\dagger}, b_{\mathbf{k}}$ を波数 \mathbf{k} のボーズ粒子の生成・消滅演算子であり $[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$ をみたとするとき

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad \psi^{\dagger}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^{\dagger} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

について、

$$[\psi(\mathbf{r}), \psi^{\dagger}(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

を示せ。