

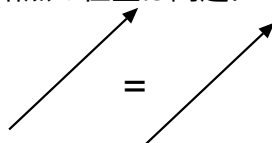
ベクトルのまとめ

1 ベクトルの演算

「ベクトル」とは、方向と大きさを持ち、平行四辺形の法則で和が作れる量である。幾何学的には矢印で表すことができる。これに対し大きさと符号のみを持つ量を「スカラー」と呼ぶ

1. ベクトルが等しいとは

二つのベクトルの長さと方向が同じであるとき、それらのベクトルは等しいという。このとき、ベクトルの始点の位置は問題にしない。

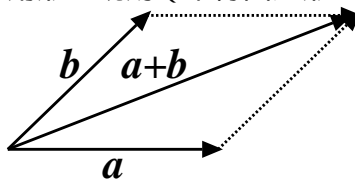


2. 0ベクトル

長さが0のベクトルを0ベクトルといい、0で表す。

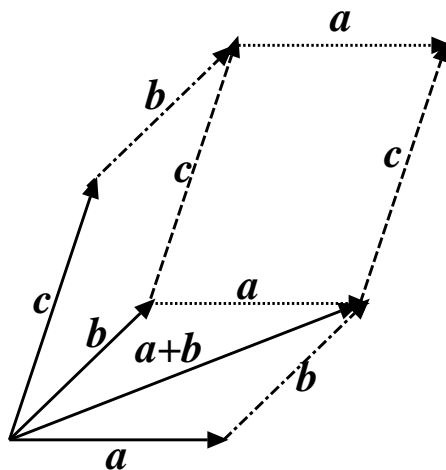
3. 和

2つのベクトルの和は三角形の規則（平行四辺形の規則）で定義する。

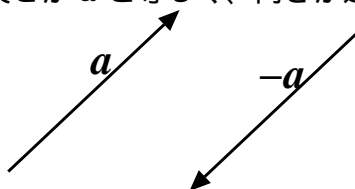


4. 交換則 $a + b = b + a$

5. 結合則 $(a + b) + c = a + (b + c)$



6. 逆ベクトル $-a$ とは、長さが a と等しく、向きが逆のベクトルを指す。

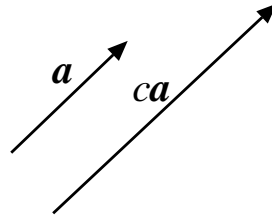


7. 差

$$a - b = a + (-b)$$

8. スカラー倍

ca とは a と同じ向きで、長さが c 倍のベクトルを言う。ただし、 c が負の時は、 a と逆の向きで、長さが $|c|$ 倍のベクトルを言う。



9. スカラー倍の分配則

$$c(a + b) = ca + cb$$

$$(c + d)a = ca + da$$

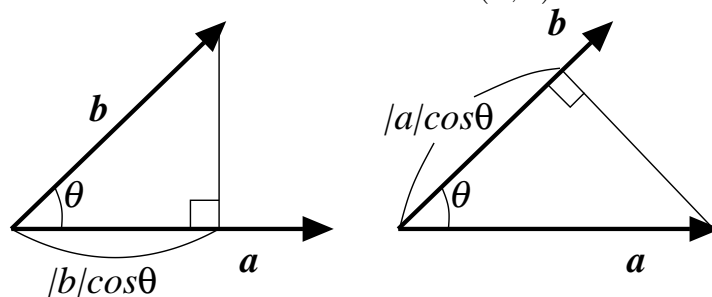
上の定義より明らか

10. 内積

2つのベクトル a と b の内積は

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta \quad (1)$$

ただし、 θ は2つのベクトルのなす角である。 (a, b) と書くことも多い。



二つのベクトル a と b が直交するとき $a \cdot b = 0$ である。

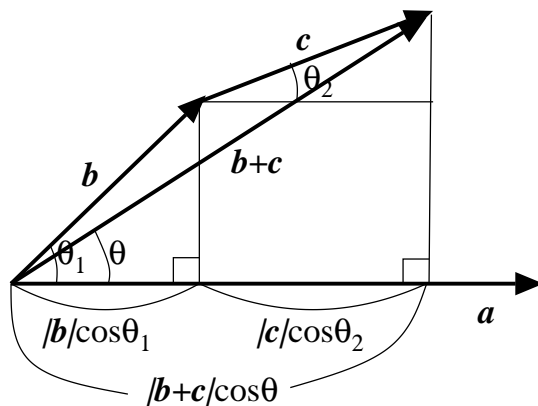
$$a \cdot a = a^2 = |a|^2$$

11. 内積の交換則

$a \cdot b = b \cdot a$ 上の定義より明らか

12. 分配則

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$



2 ベクトルの成分表示

ベクトルの実際の計算には、矢印で書いただけでは不便である。そこで、ベクトルの成分表示を用いると便利である。一般に、ベクトル \mathbf{a} を、

$$\mathbf{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z} \quad (2)$$

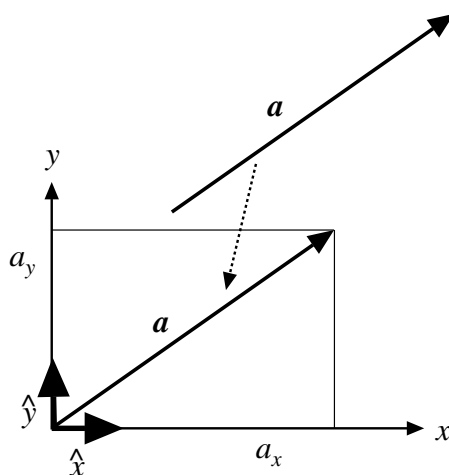
と表したとき、 a_x 、 a_y 、 a_z をそれぞれベクトル \mathbf{a} の x 成分、 y 成分、 z 成分と呼ぶ。 \hat{x} 、 \hat{y} 、 \hat{z} はそれぞれ x 、 y 、 z 方向の単位ベクトル(長さ 1 のベクトル)であり、 $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{x} = 0$ 、 $|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$ を満たす。すべての成分が等しいとき、2つのベクトルは等しい。

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) \quad (3)$$

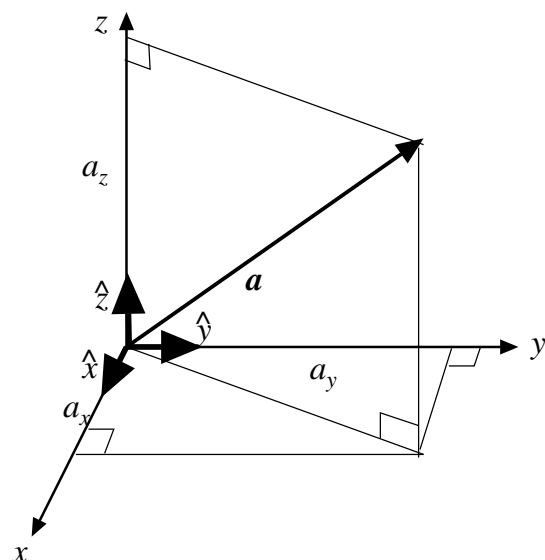
と書くことも多い。

この書き方の意味は図に示すように、ベクトルの根元を原点にとって、 xyz 座標軸をとったとき、ベクトルの先端の座標が、ベクトルの各成分になっている。

2次元の場合



3次元の場合



内積の成分表示

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}, b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z}) \quad (4)$$

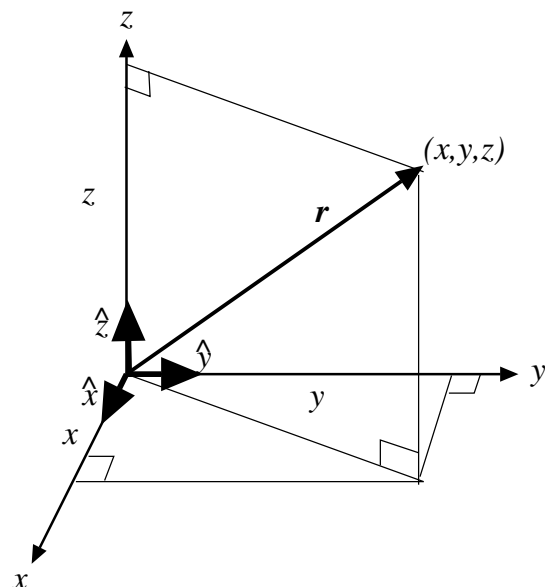
分配則を使って

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x \hat{x}^2 + a_y b_y \hat{y}^2 + a_z b_z \hat{z}^2 = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (5)$$

残りの項は $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{x} = 0$ より消えることに注意。

3 位置ベクトルの成分表示と座標

点 $P(x, y, z)$ を終点とし、原点を始点とするベクトルを点 P の位置ベクトル \mathbf{r} という。点の位置ベクトルを成分表示したものがその点の座標に他ならない。すなわち $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = (x, y, z)$ これは、上の成分の定義より明らかであろう。



一般的に点の位置を示す場合、座標を書く代わりに位置ベクトルを書く事が多い。