

# 1 ガウスの定理

任意の1回微分可能なベクトル場  $f(\mathbf{r})$  について

$$\int_V \operatorname{div} f(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.1)$$

が成り立つ。ただし、 $S$  は3次元空間の閉曲面であり、 $V$  はその内部の領域 ( $\partial V = S$ )

(証明)

第1段階:

まず、領域  $V$  を図のように  $N$  個の微小な直方体領域  $\Delta V_i (i = 1, \dots, N)$  に分割すると、(1.1) 式の右辺の面積分を  $\Delta V_i$  の表面  $\Delta S_i = \partial \Delta V_i$  についての面積分に分割することができること

$$\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_i \int_{\Delta S_i} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_i dS \quad (1.2)$$

を示そう。ここで  $\mathbf{n}_i$  は  $\Delta S_i$  の外向きの単位法線ベクトルである。

二つの隣り合った直方体領域を  $\Delta V_1$ 、 $\Delta V_2$  とする。これらの表面  $\Delta S_1$ 、 $\Delta S_2$  をこの二つの共有する面  $\Delta S_{1,2}$  とそれ以外  $\Delta S'_1$ 、 $\Delta S'_2$  に分けて考える。

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta S_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{\Delta S_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_2 dS \\ &= \int_{\Delta S'_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{\Delta S'_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_2 dS \\ &+ \int_{\Delta S_{12}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{\Delta S_{12}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_2 dS \quad (1.3) \end{aligned}$$

ここで (1.3) の右辺の第3項と第4項の  $\Delta S_{1,2}$  上での積分に注目する。第3項で  $\Delta S_1$  上での積分を考えるときの  $\mathbf{n}_1$  と第4項で  $\Delta S_2$  上での積分を考えるときの  $\mathbf{n}_2$  はそれぞれ

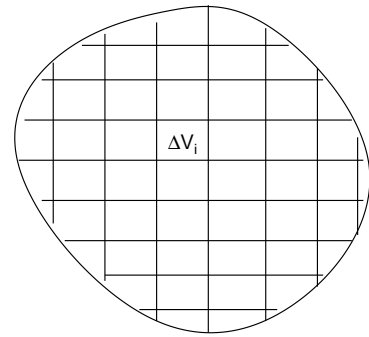


図1 空間領域の微小直方体への分割。ただし、3次元的に画くと見づらくなるので2次元的に画いてある。

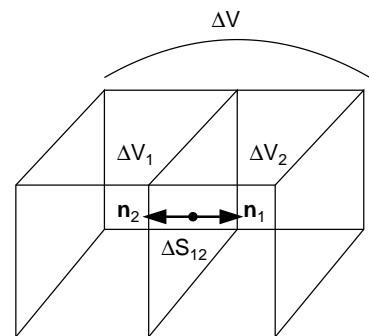


図2 2つの微小直方体。

れの領域での内側から外側に向かうので向きが逆 ( $n_2 = -n_1$ ) になることに注意すると、

$$\int_{\Delta S_{12}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_1 dS = - \int_{\Delta S_{12}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_2 dS \quad (1.4)$$

が成り立つ。即ち、(1.3) の右辺の第 3 項と第 4 項の面  $\Delta S_{1,2}$  上での積分は打ち消し合う。従って

$$\int_{\Delta S_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{\Delta S_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_2 dS = \int_{\Delta S'_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{\Delta S'_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_2 dS \quad (1.5)$$

$\Delta V_1$  と  $\Delta V_2$  を合わせた空間領域を  $\Delta V$  とし、その表面を  $\Delta S$  とすると、 $\Delta S'_1$  と  $\Delta S'_2$  を合わせたものが  $\Delta S$  であるから

$$\int_{\Delta S_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{\Delta S_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_2 dS = \int_{\Delta S} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.6)$$

が得られる。つまり、2つの互いに面を共有した直方体の表面上での  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$  の面積分の和は、2つをくっつけた大きい直方体の表面上での  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$  の面積分に等しくなる。これを繰り返すと、結局他の直方体と共有していない面、すなわち  $V$  の表面の面積分だけが残り、(1.2) が成り立つことが分かる。

第 2 段階：

次に、各微小領域の表面での積分を考えるが、以下では煩雑になるので添え字  $i$  を省く。微小領域の中心を、 $(x, y, z)$  とし、各辺の長さを  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  とする。この直方体の表面を  $\Delta S$  とする。 $\Delta S$  は 6 つの面からなるが、まず、 $x$  軸に垂直な 2 つの面 (図の  $\Delta S_x$  と  $\Delta S'_x$ ) について考える。

$\Delta S_x$  上の点の  $x$  座標は  $x + \frac{\Delta x}{2}$  である。また、 $y$  座標は  $(y - \frac{\Delta y}{2}, y + \frac{\Delta y}{2})$ 、 $z$  座標は  $(z - \frac{\Delta z}{2}, z + \frac{\Delta z}{2})$  の範囲で変化する。また、単位法線ベクトル  $\mathbf{n} = \hat{x}$  であるので  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = f_x$  になることに注意して、

$$\int_{\Delta S_x} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{y - \frac{\Delta y}{2}}^{y + \frac{\Delta y}{2}} \int_{z - \frac{\Delta z}{2}}^{z + \frac{\Delta z}{2}} f_x(x + \frac{\Delta x}{2}, y', z') dy' dz' \quad (1.7)$$

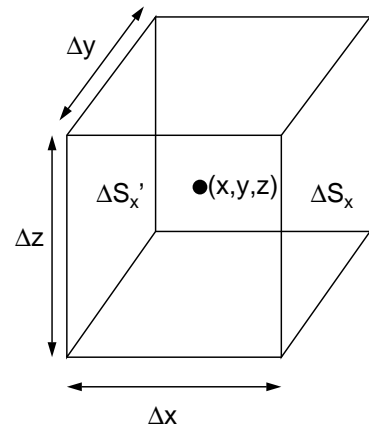


図 3 微小直方体表面上の面積分

ここで直方体の中心の座標  $(x, y, z)$  と区別するため積分変数には ' をつけた。

次に  $\Delta S'_x$  上の点の  $x$  座標は  $x - \frac{\Delta x}{2}$  である。 $y$  座標は  $(y - \frac{\Delta y}{2}, y + \frac{\Delta y}{2})$ 、 $z$  座標は  $(z - \frac{\Delta z}{2}, z + \frac{\Delta z}{2})$  の範囲で変化する。また、単位法線ベクトル  $\mathbf{n} = -\hat{x}$  があるので  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = -f_x$  になることに注意して、

$$\int_{\Delta S'_x} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{y - \frac{\Delta y}{2}}^{y + \frac{\Delta y}{2}} \int_{z - \frac{\Delta z}{2}}^{z + \frac{\Delta z}{2}} f_x(x - \frac{\Delta x}{2}, y', z') dy' dz' \quad (1.8)$$

この二つの寄与を加えると

$$\int_{\Delta S_x + \Delta S'_x} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{y - \frac{\Delta y}{2}}^{y + \frac{\Delta y}{2}} \int_{z - \frac{\Delta z}{2}}^{z + \frac{\Delta z}{2}} \left\{ f_x(x + \frac{\Delta x}{2}, y', z') - f_x(x - \frac{\Delta x}{2}, y', z') \right\} dy' dz' \quad (1.9)$$

{...} 中の各項をテーラー展開すると

$$f_x(x + \frac{\Delta x}{2}, y', z') \simeq f_x(x, y', z') + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial f_x(x, y', z')}{\partial x} \quad (1.10)$$

$$f_x(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z) \simeq f_x(x, y', z') - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial f_x(x, y', z')}{\partial x} \quad (1.11)$$

従って

$$f_x(x + \frac{\Delta x}{2}, y', z') - f_x(x - \frac{\Delta x}{2}, y', z') \simeq \Delta x \frac{\partial f_x(x, y', z')}{\partial x} \quad (1.12)$$

$\Delta x$  が無限小の極限では  $\simeq$  は等号と見なしてよいので、

$$\int_{\Delta S_x + \Delta S'_x} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{y - \frac{\Delta y}{2}}^{y + \frac{\Delta y}{2}} \int_{z - \frac{\Delta z}{2}}^{z + \frac{\Delta z}{2}} \Delta x \frac{\partial f_x(x, y', z')}{\partial x} dy' dz' \quad (1.13)$$

$y$  や  $z$  の積分範囲も無限小の極限を取るので、非積分関数は微小領域の中心  $(x, y, z)$  における値で置き換えてよい。従って

$$\int_{\Delta S_x + \Delta S'_x} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS = \Delta x \frac{\partial f_x(x, y, z)}{\partial x} \int_{y - \frac{\Delta y}{2}}^{y + \frac{\Delta y}{2}} \int_{z - \frac{\Delta z}{2}}^{z + \frac{\Delta z}{2}} dy' dz' \quad (1.14)$$

$$= \frac{\partial f_x(x, y, z)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.15)$$

y 軸に垂直な 2 面、z 軸に垂直な 2 面の寄与も同じように計算し和を取ると、

$$\int_{\Delta S} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS = \left\{ \frac{\partial f_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial f_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial f_z(x, y, z)}{\partial z} \right\} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.16)$$

$$= \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.17)$$

従ってこれを (1.2) の右辺の各項に代入すると

$$\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_i \operatorname{div} \mathbf{f}(x_i, y_i, z_i) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.18)$$

分割を無限に細かくする極限を取ると右辺は体積分  $\int_V \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}$  になるのでガウスの定理 (1.1) が成り立つ。

## 2 ストークスの定理

任意の 1 回微分可能なベクトル場  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$  について

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.1)$$

が成り立つ。ただし、 $C$  は 3 次元空間の閉曲線であり、 $S$  はそれを境界とする曲面 ( $\partial S = C$ )、 $\mathbf{n}$  は  $S$  の単位法線ベクトル。右辺の積分は、 $\mathbf{n}$  の指し示す方向から見て、反時計回りに回る。

証明)

第 1 段階：

まず、領域  $S$  を図のように  $N$  個の微小領域  $\Delta S_i (i = 1, \dots, N)$  に分割すると、(2.1) 式の右辺の線積分を  $\Delta S_i$  の境界をなす閉曲線  $\Delta C_i = \partial \Delta S_i$  についての線積分に分割することができること

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \sum_i \oint_{\Delta C_i} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.2)$$

を示そう。

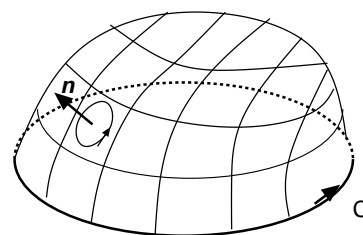


図 4 曲面の微小領域への分割。図が見にくくなるので書き込まなかったが、各微小領域を  $\Delta S_i$ 、その境界を  $\Delta C_i$  とする。

二つの隣り合った微小領域を  $\Delta S_1$ 、 $\Delta S_2$  とする。これらの境界  $\Delta C_1$ 、 $\Delta C_2$  についての積分の和

$$\oint_{\Delta C_1} f \cdot dr + \oint_{\Delta C_2} f \cdot dr \quad (2.3)$$

を考えるとこの二つの共有する边上での積分は第1項と第2項では逆方向に積分することになるので打ち消し合い、 $\Delta S_1$  と  $\Delta S_2$  を合わせた領域の周  $\Delta C$  上の積分だけが残る。

$$\oint_{\Delta C_1} f \cdot dr + \oint_{\Delta C_2} f \cdot dr = \oint_{\Delta C} f \cdot dr \quad (2.4)$$

これを繰り返せば、(2.2) が成り立つことが分かる。

第2段階：

次に、各微小領域の周を一回りする積分  $\oint_{\Delta C_i} f \cdot dr$  を考える。計算を簡単にするため、微小領域を長方形にとり、その面の法線方向に  $z$  軸をとり、2辺の方向に  $x$  軸  $y$  軸を取ることにする。以下では添え字  $i$  を省く。長方形の中心を、 $(x, y, z)$  とし、各辺の長さを  $\Delta x, \Delta y$  とする。この直方体の周を  $\Delta C$  とする。 $\Delta C$  は4つの辺からなるが、まず、 $y$  軸方向の2つの辺について考える。

図の辺  $\Delta C_y$  上の点の  $x$  座標は  $x + \frac{\Delta x}{2}$  である。また、 $y$  座標は  $y - \frac{\Delta y}{2}$  から  $y + \frac{\Delta y}{2}$  まで変化する。また、 $dr = \hat{y} dy$  であるので  $f \cdot dr = f_y dy$  になることに注意して、

$$\int_{\Delta C_y} f \cdot dr = \int_{y - \frac{\Delta y}{2}}^{y + \frac{\Delta y}{2}} f_y \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y', z \right) dy' \quad (2.5)$$

ここで長方形の中心の  $y$  座標と区別するため積分変数には'をつけた。

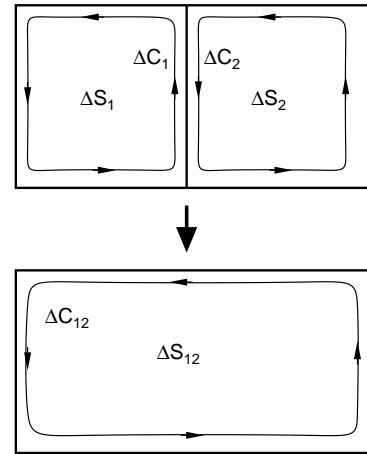


図5 2つの微小領域のまわりの線積分

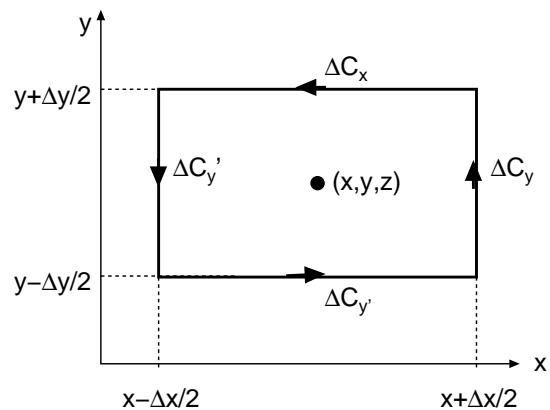


図6 微小長方形上の線積分

次に辺  $\Delta C'_y$  上の点の  $x$  座標は  $x - \frac{\Delta x}{2}$  である。  $y$  座標は  $y + \frac{\Delta y}{2}$  から  $y - \frac{\Delta y}{2}$  まで変化する。

$$\int_{\Delta C'_y} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{y+\frac{\Delta y}{2}}^{y-\frac{\Delta y}{2}} f_y(x - \frac{\Delta x}{2}, y', z) dy' \quad (2.6)$$

$$= - \int_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}} f_y(x - \frac{\Delta x}{2}, y', z) dy' \quad (2.7)$$

この二つを合わせて、微小量  $\Delta x$  について展開すると

$$\int_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}} \left( f_y(x + \frac{\Delta x}{2}, y', z) - f_y(x - \frac{\Delta x}{2}, y', z) \right) dy' \simeq \frac{\partial f_y(x, y, z)}{\partial x} \Delta x \Delta y \quad (2.8)$$

同様に  $x$  軸方向を向いた 2 つの辺からの寄与は

$$\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \left( f_x(x', y - \frac{\Delta y}{2}, z) - f_x(x', y + \frac{\Delta y}{2}, z) \right) dx' \simeq - \frac{\partial f_x(x, y, z)}{\partial y} \Delta x \Delta y \quad (2.9)$$

で与えられる。この二つの寄与を加えると

$$\oint_{\Delta C} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \left( \frac{\partial f_y(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial f_x(x, y, z)}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \quad (2.10)$$

右辺の括弧の中は  $\Delta C$  の中心  $(x, y, z)$  における  $\text{rot} \mathbf{f}$  の  $z$  成分である。今、 $\Delta C$  の法線方向を  $z$  軸に取ったのは計算の都合だけのことであるから、面の法線が任意の方向を向いている場合は、これは  $\text{rot} \mathbf{f}$  の法線方向の成分  $\text{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$  に対応し、 $\Delta x \Delta y$  は微小領域の面積  $\Delta S$  に対応する。従って、一般の方向を向いた微小長方形に対しては

$$\oint_{\Delta C} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \text{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \Delta S \quad (2.11)$$

が成り立つことになる。ただし、右辺の  $\text{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$  は  $\Delta C$  の中心における値である。これを (2.2) の右辺の各項に代入すると

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \sum_i [\text{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} \Delta S_i \quad (2.12)$$

ここで  $[\dots]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i}$  は  $\Delta S_i$  の中心  $\mathbf{r}_i$  における ... の値を表す。

分割を細かくした極限で右辺は  $\int_S \text{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS$  に等しいのでストークスの定理 (2.1) が成り立つことが分かる。