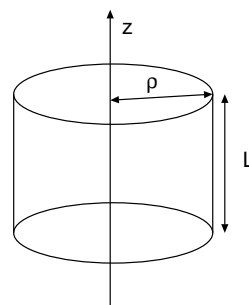


基礎電磁気学：レポート問題 II

※切：1月8日（火）の講義開始時（できる問題をすべて解答すること）

- [II-1] 電場に対するガウスの法則とはどのようなものか、簡潔に説明せよ。
- [II-2] 原点を中心とする半径 a の球の表面に電荷が面密度 σ_0 で一様に分布している。このとき、対称性から電場は $E(\mathbf{r}) = E(r)\hat{r}$ ($r = |\mathbf{r}|$) であることに注意して、任意の点 r における電場 $E(r)$ を次の手順で求めよ。
- (a) 原点を中心とする半径 r の球面 S を内側から外側に貫く電束 Ψ を $E(r)$ を用いて表せ。
 - (b) S の内部にある電荷 Q を求めよ。（ $r > a$ の場合と $0 < r < a$ の場合で表式が異なるので場合分けすること。）
 - (c) ガウスの法則から $Q = \Psi$ であることを用いて、 $E(r)$ を求め、 r の関数として図示せよ。
 - (d) ベクトル $E(r)$ を求め、電気力線を用いて球の外部での電場の様子の概略を図示せよ。
- [II-3] z 軸を中心軸とする半径 a の無限に長い円柱の内部に密度 σ_0 で電荷が一様に分布している。このような場合、点の位置を表すのに、円柱座標 (ρ, θ, z) ($x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $z = z$) を用いると便利である。このとき、対称性から電場は $E(\mathbf{r}) = E(\rho)\hat{\rho}$ ($\hat{\rho} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$: ρ が増える向きの単位ベクトル) と書ける事に注意して、任意の点 r での電場 $E(r)$ を次の手順で求めよ。
- (a) 図のような、 z 軸を中心軸とする半径 ρ 、高さ L の円柱の表面 S を内側から外側に貫く電束 Ψ を考える。
 - i. 円柱の上下の底面を貫く電束は、0であることを示せ。
 - ii. Ψ を $E(\rho)$ を用いて表せ。（i. が成り立てば、側面を貫く電束だけを考慮すればよい。）
 - (b) S の内部にある電荷を求めよ。（ $\rho > a$ の場合と $0 < \rho < a$ の場合で表式が異なるので場合分けすること。）
 - (c) ガウスの法則から $Q = \Psi$ であることを用いて、 $E(\rho)$ を求め、 ρ の関数として図示せよ。
 - (d) ベクトル $E(r)$ を求め、電気力線を用いて電場の様子の概略を図示せよ。



[II-5] 生物の細胞膜の内側と外側の電位差を膜電位という。神経細胞では、膜電位がおおよそ70mVであり、この電位の反転によって信号の伝達が行われている。このとき細胞膜中の電場の強さを求めよ（電場は膜の中で一定としてよい）。ただし細胞膜の厚さを $1\mu\text{m}$ とする。

[II-6] (a) 10000V の高圧線が地上 20m に張られているとき、地上での電場の強さ E がおおよそどの程度か見積もれ。（地上の電位を 0 とし、おおよその見積もりなので、電場は一様としてよい）

(b) この結果と前問の結果から高圧線の作る電場が神経細胞の信号伝達に影響をあたえるかどうかを考察せよ。

[II-7] 位置 \mathbf{r} における静電ポテンシャルが次の関数 $\phi(\mathbf{r})$ で与えられるとき、その点での電場 $E(\mathbf{r})$ を求めよ。また、等電位面のようすの概略を図示せよ。ただし、 V_0, k は正の定数、 $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする。

(a) $\phi(\mathbf{r}) = \frac{k}{2}r^2$ (b) $\phi(\mathbf{r}) = V_0 \cos(kx)$

[II-8] 原点を中心とする半径 a の球面の表面に電荷 Q が一様に分布している。

(a) 位置 \mathbf{r} での静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ を求めよ。（電場はII-2で $Q = 4\pi a^2 \sigma_0$ とおいたもの。これを無限遠から r まで積分。積分のやり方は、講義でやった点電荷の場合と同様。）

(b) この電荷による、静電場のエネルギーを次の二つの方法で求め、結果が一致することを確認せよ。

i. 全く帯電していない球の表面に無限遠から少しずつ電荷を運んできて、 Q だけ帯電させるのに必要な仕事を計算する。（ Q' だけ帯電した状態で dQ' だけの電荷を無限遠から持ってくる時に必要な仕事は、そのときの球面上 ($|\mathbf{r}| = a$) の電位 $\times dQ'$ 。これを $Q' = 0$ から $Q' = Q$ まで積分。

ii. 以前ガウスの法則を使って求めた電場の式から、エネルギー密度を求め全空間で積分する。（ $r \sim r + dr$ の間の厚さ dr の球殻の体積は $4\pi r^2 dr$ であることに注意）