

微積分のまとめ

1 1変数の微分・積分

1.1 微分

1. 微分の定義

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \left(\frac{d}{dx} f(x), f'(x) \text{ と書くこともある。} \right) \quad (1)$$

2. 積の微分

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (f(x)g(x)) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \{ (f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x)) + (f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)) \} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{(f(x + \Delta x) - f(x))}{\Delta x} g(x + \Delta x) + f(x) \frac{(g(x + \Delta x) - g(x))}{\Delta x} \right\} \\ &= \frac{df(x)}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg(x)}{dx} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{特に } f(x) = g(x) \text{ とおくと、} \frac{d}{dx} f(x)^2 = 2 \frac{df(x)}{dx} f(x) \quad (3)$$

3. 関数の関数の微分（合成関数の微分）

$$\frac{d}{dx} (f(g(x))) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \quad (4)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{g(x + \Delta x) - g(x)} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \frac{df(g)}{dg} \frac{dg(x)}{dx} \quad (5)$$

4. 種々の関数の微分

(a) 巾関数

$$\frac{d}{dx} x^0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{\Delta x} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx} x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = 1 \quad (7)$$

$$\frac{d}{dx} x^2 = x \frac{d}{dx} x + x \frac{d}{dx} x = x + x = 2x \quad (8)$$

$$\frac{d}{dx} x^3 = x^2 \frac{d}{dx} x + x \frac{d}{dx} x^2 = x^2 + 2x^2 = 3x^2 \quad (9)$$

$$\text{これを繰り返して } \frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1} \quad (n \geq 0) \quad (10)$$

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{1}{x} \right) = \frac{d}{dx} 1 = 0 \quad (11)$$

左辺は

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{1}{x} \right) = x \frac{d}{dx} \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \quad (12)$$

とも書けるので

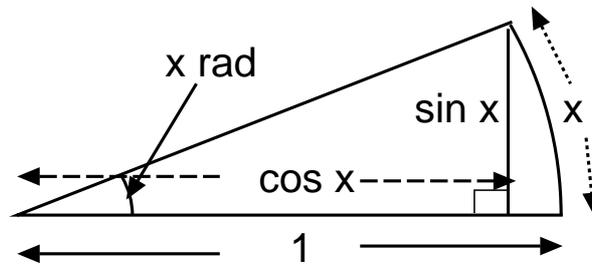
$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \quad (13)$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = 2 \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{2}{x^3} \quad (14)$$

$$\text{これを繰り返して } \frac{d}{dx} \frac{1}{x^n} = -n x^{n+1} \quad ((10) \text{ で } n \text{ が負の場合に対応}) \quad (15)$$

(b) 三角関数とその微分

i. 弧度法



この角度を x rad とする。たとえば、 $180^\circ = \pi$ rad。普通、数学や物理では rad はいちいち書かない (弧度法を使うのが常識なので)。

ii. 微小な角の三角関数 $|x| \ll 1$ のとき、図から明らかのように

$$\cos x \simeq 1 \quad (16)$$

$$\sin x \simeq x \quad (17)$$

iii. 加法定理

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad (18)$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad (19)$$

図を描いてみれば明らか。

これらを利用して、次の公式が得られる。

iv. 三角関数の微分

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cos x &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sin x \Delta x - \cos x}{\Delta x} = -\sin x \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin x &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x \Delta x - \sin x}{\Delta x} = \cos x \end{aligned} \quad (21)$$

(c) 指数関数とその微分

$$\frac{df(x)}{dx} = f(x), \quad f(0) = 1 \quad (22)$$

を満たす関数を考える。つまり変化率が自分自身に比例する関数である。^{*1}ただし、ここでは、比例定数を1とし、 $x = 0$ での値を1とする。

x を0から微少量 Δx ずつ一歩一歩増やしていくとき、 $f(x)$ がどのように変わっていくかを見てみる。

$$\begin{aligned} f(\Delta x) &\simeq f(0) + f'(0)\Delta x = f(0)(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x) \\ f(2\Delta x) &\simeq f(\Delta x)(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^2 \\ f(n\Delta x) &\simeq (1 + \Delta x)^n \end{aligned} \quad (23)$$

$n\Delta x = x$ とおくと

$$f(x) \simeq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$\Delta x \rightarrow 0$ すなわち $n \rightarrow \infty$ の極限をとると、この関係は厳密になる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n/x}\right)^x \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right)^x = e^x \end{aligned} \quad (24)$$

ここで

$$e = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u \simeq 2.71828\dots \quad (\text{ネピア数}) \quad (25)$$

^{*1} このような現象は自然科学の様々な場面で現れる。放射性元素の崩壊、生物の増殖や突然変異、空気抵抗のある質点の速度など。

を定義した。この関数 $f(x) = e^x$ を (e を底とする) 指数関数と呼ぶ。指数関数は

$$\frac{de^x}{dx} = e^x \quad (26)$$

を満たす。

なお、数学的には e を底とする指数関数が一番扱いやすいので、もっぱらこれを用い、単に指数関数といえばこれを指す。

(d) 対数関数とその微分

指数関数 e^x の逆関数を e を底とする対数関数 (自然対数) と呼び $\log_e x$ または $\ln x$ と書く。すなわち、 $x = e^y$ のとき $y = \ln x$ である。物理では指数関数の場合と同様もっぱらこれを使う。

微分は、 $y = \ln x$ とすると、 $x = e^y$ なので

$$\frac{dx}{dy} = e^y = x \quad (27)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad (28)$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad (29)$$

(e) 一般の底の指数関数・対数関数

一般に a^x ($a > 0$) を a を底とする指数関数と呼ぶ。10 進法では、 $a = 10$ ととると、 10^x がちょうど 1 の後に 0 を x 個つけた数を表す ($x + 1$ が桁数) ので便利である。数値の表現などにはこの表記がよく使われる。 $a = e^{\ln a}$ なので

$$a^x = e^{(\ln a)x} \quad (30)$$

一般の底の指数関数の微分

$$\frac{da^x}{dx} = \frac{de^{(\ln a)x}}{dx} = (\ln a)e^{(\ln a)x} = (\ln a)a^x \quad (31)$$

a を底とする指数関数の逆関数を a を底とする対数関数と呼び $\log_a x$ と書く。すなわち、 $x = a^y$ のとき $y = \log_a x$ である。10 を底とする対数は常用対数という。 $1 + \log_{10} x$ の整数部が 10 進法での桁数を表す。

$y = \log_a x$ とおくと

$$x = a^y = e^{(\ln a)y} = e^{(\ln a) \log_a x} \quad (32)$$

$$\ln x = (\ln a) \log_a x \quad (33)$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (34)$$

一般の底の対数関数の微分

$$\frac{d \log_a x}{dx} = \frac{1}{x} \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a} \quad (35)$$

(f) 指数関数と三角関数の関係

上と同じように考えると

$$\frac{df(x)}{dx} = if(x), \quad f(0) = 1 \quad (i \text{ は虚数単位}) \quad (36)$$

を満たす関数は

$$f(x) = e^{ix} \quad (37)$$

であるはずだが、

$$f(x) = \cos x + i \sin x \quad (38)$$

も (36) を満たすことは、三角関数の微分の公式を使えばすぐ分かる。従って

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (39)$$

であることがわかる。これをオイラーの公式という。特に、 $x = \pi$ ととると

$$e^{i\pi} = -1 \quad (40)$$

である。

1.2 積分

1. 積分の定義

区間 $[a, b]$ を N 個の微小区間に分割

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x \quad (41)$$

特に

$$F(x, a) = \int_a^x f(x) dx \quad (42)$$

と書くと

$$\frac{d}{dx} F(x, a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x) dx}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) \int_x^{x+\Delta x} dx}{\Delta x} = \frac{f(x) \Delta x}{\Delta x} = f(x) \quad (43)$$

a の値によらず、 $F(x, a)$ を微分すれば $f(x)$ になることに注意。

一般に、微分すると $f(x)$ になる関数を $f(x)$ の原始関数 (不定積分) と呼び、上限・下限を明記せずに $\int f(x)dx$ と書く。上の $F(x, a)$ は $f(x)$ の原始関数の一つである。 $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき、 $F(x) + C$ (C は任意の定数) も $f(x)$ の原始関数なので、普通、原始関数は $\dots + C$ という形に書き表す。 C を積分定数と呼ぶ。

$f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ と書くと、定積分は

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ これを } F(x)|_a^b \text{ と書く} \quad (44)$$

と書ける。積分定数は差し引き消えてしまうことに注意。

2. 原始関数の例

(10) より

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \quad (45)$$

その他

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \quad (46)$$

3. 積分変数の変換 $x = g(u)$ と書くと

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(u)) \frac{dg}{du} du, \quad g(\alpha) = a, \quad g(\beta) = b \quad (47)$$

例

$$\int_a^b \sqrt{x} dx = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \sqrt{u^2} \frac{du^2}{du} du \quad (x = u^2 \text{ とおいた}) \quad (48)$$

$$= \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} 2u^2 du = \frac{2}{3} u^3 \Big|_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} = \frac{2}{3} (a^{3/2} - b^{3/2}) \quad (49)$$

4. 部分積分

$$\frac{d}{dx} (f(x)g(x)) = \frac{df(x)}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg(x)}{dx} \quad (50)$$

の両辺を積分すると

$$f(x)g(x) \Big|_a^b = \int_a^b \frac{df(x)}{dx} g(x) dx + \int_a^b f(x) \frac{dg(x)}{dx} dx \quad (51)$$

$$\int_a^b \frac{df(x)}{dx} g(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) \frac{dg(x)}{dx} dx \quad (52)$$

2 多変数の微積分

2.1 偏微分

多変数関数 $f(x, y, \dots)$ を一つの変数について微分するとき、残りの変数を定数と見なして微分することを「偏微分」といい、次のように書く。

$$\frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, \dots) - f(x, y, z, \dots)}{\Delta x} \quad (53)$$

よく出てくるのは、3次元空間の座標の関数 $f(x, y, z) = f(\mathbf{r})$, ($\mathbf{r} = (x, y, z)$) に対し、

$$\text{grad}f(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x}, \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial y}, \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial z} \right), \text{ 演算の結果はベクトル量} \quad (54)$$

関数自体もベクトルになるときはベクトル関数と呼ばれ f も太字にする。ベクトル関数に対してよく出てくる演算は

$$\text{div} \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \frac{\partial f_x(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial f_y(\mathbf{r})}{\partial y} + \frac{\partial f_z(\mathbf{r})}{\partial z}, \text{ 演算の結果はスカラー量} \quad (55)$$

$$\text{rot} \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial f_z(\mathbf{r})}{\partial y} - \frac{\partial f_y(\mathbf{r})}{\partial z}, \frac{\partial f_x(\mathbf{r})}{\partial z} - \frac{\partial f_z(\mathbf{r})}{\partial x}, \frac{\partial f_y(\mathbf{r})}{\partial x} - \frac{\partial f_x(\mathbf{r})}{\partial y} \right), \text{ 演算の結果はベクトル量} \quad (56)$$

2.2 体積分、面積分、線積分

1. 体積分

3次元空間の領域 V を微小領域 $\Delta V_i (i = 1, \dots, N)$ に分割し、それぞれの微小領域の中心を (x_i, y_i, z_i) と書くと

$$\int_V f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i \quad (57)$$

これを関数 $f(x, y, z)$ の V での体積分という。位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ を用い

$$\int_V f(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} \quad (58)$$

と書くこともある。実際の計算では、デカルト座標なら x, y, z の3つの変数について3回積分する。極座標や円柱座標など、問題によって使いやすい座標を使うことになるが、細かく分けて足すという基本に戻って考えればよい。

2. 面積分

3次元空間の曲面 S を微小面 $\Delta S_i (i = 1, \dots, N)$ に分割し、それぞれの微小面の中心を (x_i, y_i, z_i) と書くと

$$\int_S f(\mathbf{r}) dS = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i \quad (59)$$

これを関数 $f(x, y, z)$ の S 上の面積分という。実際の計算では、面上の点を表す適当な2つの座標（平面なら xy 座標や極座標）を考えその2つについて2回積分する。よく出てくるのは、ベクトル関数 $f(\mathbf{r})$ の面に垂直方向の成分の面積分

$$\int_S \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (60)$$

このとき面の単位法線ベクトル \mathbf{n} をどちら向きにとるかで符号が変わることに注意。

3. 線積分

3次元空間にある曲線 C を微小線分 $\Delta s_i (i = 1, \dots, N)$ に分割し、それぞれの微小線分の中心を (x_i, y_i, z_i) と書くと

$$\int_C f(\mathbf{r}) ds = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i \quad (61)$$

これを関数 $f(x, y, z)$ の S 上の面積分という。実際に計算するときは、曲線上の点を表す適当な1つの座標（最も簡単には始点からの曲線に沿った長さ）を考えそれについて積分することになる。よく出てくるのは、ベクトル関数 $f(\mathbf{r})$ の曲線の方向の成分の線積分

$$\int_C \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C (\mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}) ds \quad (62)$$

\mathbf{t} は曲線の接線方向の単位ベクトル、 $d\mathbf{r}$ は曲線の接線方向の微小ベクトル。このとき線分に沿ってどちら向きに積分するかで符号が変わることに注意。