

3.5 減衰振動

さて、落体のような簡単な問題でも、空気抵抗のある場合は高校物理では微分方程式を禁じ手にされていたので取り扱えなかった。では、単振動をしている物体が空気抵抗のような速度に比例する抵抗力を受けていたらどんな運動をするだろうか。

運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\eta \frac{dx}{dt} - kx \quad (1)$$

である。見やすいように、全部を左辺に移項して、 m で割っておくと

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2)$$

となる。ただし、 $\gamma = \eta/m$ 、 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ である。 ω_0 は空気抵抗がない場合の単振動の角振動数である。

ところが、これは前の単振動で使ったような工夫もうまくいかないのはやってみればすぐ分かる。それは考えてみれば当たり前である。単振動の時は要するにエネルギー保存則に相当する式を経由して解を導いたが、抵抗力がある場合にはエネルギー保存則が成り立つわけがないから、同じようには行かないのである。ではどうするか。前に、 $k=0$ の場合は答えは指数関数で与えられた。それを思い出してためしに $x = \exp(\lambda t)$ と置いてみることにしよう。指数関数の微分の公式を使うと

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \exp(\lambda t), \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \lambda^2 \exp(\lambda t) \quad (3)$$

従って、これを運動方程式 (2) に代入すると

$$\lambda^2 \exp(\lambda t) + \gamma \lambda \exp(\lambda t) + \omega_0^2 \exp(\lambda t) = 0 \quad (4)$$

となり $\exp(\lambda t)$ がくり出せる

$$(\lambda^2 + \gamma \lambda + \omega_0^2) \exp(\lambda t) = 0 \quad (5)$$

$\exp(-\lambda t)$ は 0 でないから結局

$$\lambda^2 + \gamma \lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (6)$$

が成り立つような λ に対しては $x = \exp(\lambda t)$ がこの運動方程式 (2) の解である。ここで λ を決める式 (6) をこの微分方程式 (2) の特性方程式という。

この問題では、特性方程式は 2 次方程式の形をしているので解は簡単に求められる。すなわち

$$\lambda = \lambda_{\pm} = -\frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} \quad (7)$$

となる。従って、これで微分方程式 (2) のつぎの 2 つの解を求めることができたわけである

$$x_+(t) = \exp(\lambda_+ t) = \exp\left(-\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} t\right) \quad (8)$$

$$x_-(t) = \exp(\lambda_- t) = \exp\left(-\frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} t\right) \quad (9)$$

しかし、これだけではたった2つの解が求まっただけで、どんな初期条件にでも対応できる一般解からはほど遠いと思われるかも知れない。しかし、ここで、微分方程式(2)が、重ね合わせの原理と呼ばれる重要な性質を持っていることを利用することにする。

[重ね合わせの原理]

$x_1(t)$ と $x_2(t)$ が微分方程式(2)の解だとする。このとき、この二つの解の任意の「線形結合」 $x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$ (C_1, C_2 は任意の定数) もこの微分方程式の解である

証明：

代入してみれば

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x &= \frac{d^2}{dt^2}(C_1x_1(t) + C_2x_2(t)) + \gamma \frac{d}{dt}(C_1x_1(t) + C_2x_2(t)) + \omega_0^2(C_1x_1(t) + C_2x_2(t)) \\ &= C_1 \left\{ \frac{d^2}{dt^2}x_1(t) + \gamma \frac{d}{dt}x_1(t) + \omega_0^2x_1(t) \right\} \\ &\quad + C_2 \left\{ \frac{d^2}{dt^2}x_2(t) + \gamma \frac{d}{dt}x_2(t) + \omega_0^2x_2(t) \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ がどちらも(2)の解であることより、 $\{ \}$ の中はどちらも0になる。従って

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (11)$$

となり、この $x(t)$ は微分方程式(2)の解である¹

この定理を利用すると、

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \exp(\lambda_+ t) + C_2 \exp(\lambda_- t) \\ &= C_1 \exp\left(-\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}\right)t + C_2 \exp\left(-\frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}\right)t \end{aligned} \quad (13)$$

が(2)の解であることが分かる。ところが、この解は、2つの未知定数 C_1, C_2 を含んでいるので、どんな初期条件を与えても、それを満たすように C_1, C_2 を定めることができるので、一般解となっている。

¹このような重ね合わせの原理は一般に次のような形の微分方程式に対して成立する。(この証明は上の証明とほとんど同じなので各自試みて見よ。)

$$\sum_{n=0}^N p_n(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} = 0 \quad (12)$$

つまり、各項が求めるべき関数 $x(t)$ およびその導関数について1次の項だけからできている微分方程式である。このようなタイプの微分方程式を「斉次線形常微分方程式」という。線形というのは、左辺が $x(t)$ およびその導関数について1次式ということである。「斉次」というのは、左辺が1次式であるだけでなく、各項の次数が1次ということである($x(t)$ に依存しない項がない)。「常」微分方程式というのは、後に出てくる「偏」微分方程式と区別するために、今は気にしなくてよい。

なお、(2)は、更に最高次の微分が2階微分であること、係数がすべて定数であることから「定数係数2階斉次線形常微分方程式」とよばれる。名前が長くなるほど、方程式自体は簡単になる。

さて、一般解が得られたのでこの運動の性質をもう少し詳しく見てみよう。まず、特性方程式が2次方程式だったので、その根の性質によって微分方程式の方の振る舞いも変わってくることは当然である。まず、わかりやすいように実根の場合 ($\gamma > 2\omega_0$) から始めよう

3.6 $\gamma > 2\omega_0$ の場合

この場合は、2つの解は共に単なる指数関数である。従って、時間と共に単調に減少してゆく。 γ が大きいために、もともと抵抗のない場合の特徴であった「振動」という性質は全く失われてしまって、平衡点からずれると、何の振動もしないままずると平衡点に近づいてゆくのである。このような場合を過減衰と呼ぶ。初期条件として $t = 0$ で $x = x_0$ 、 $v = \dot{x} = v_0$ として係数を定めてみよう。この解き方では、速度の表式がまだ得られていないのでまずそれを計算する。

$$\frac{dx(t)}{dt} = C_1 \lambda_+ \exp(\lambda_+ t) + C_2 \lambda_- \exp(\lambda_- t) \quad (14)$$

$t = 0$ とおくと

$$x(0) = C_1 + C_2 = x_0 \quad (15)$$

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = C_1 \lambda_+ + C_2 \lambda_- = v_0 \quad (16)$$

これらより

$$C_1 = \frac{x_0 \lambda_- - v_0}{\lambda_- - \lambda_+}, \quad C_2 = -\frac{x_0 \lambda_+ - v_0}{\lambda_- - \lambda_+} \quad (17)$$

が得られる。従って、解は

$$x(t) = \frac{x_0 \lambda_- - v_0}{\lambda_- - \lambda_+} \exp\left(-\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} t\right) - \frac{x_0 \lambda_+ - v_0}{\lambda_- - \lambda_+} \exp\left(-\frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} t\right) \quad (18)$$

となる。

3.7 $\gamma < 2\omega_0$ の場合

この場合は、特性方程式の根が虚部を持つ。すなわち

$$\lambda = \lambda_{\pm} = -\left\{ \frac{\gamma}{2} \pm i \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}}{2} \right\} \quad (19)$$

と書ける。すると、微分方程式の解は

$$x_+(t) = \exp(\lambda_+ t) = \exp\left(-\frac{\gamma + i\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}}{2} t\right) = \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \exp\left\{i \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2} t}{2}\right\} \quad (20)$$

$$x_-(t) = \exp(\lambda_- t) = \exp\left(-\frac{\gamma - i\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}}{2} t\right) = \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \exp\left\{-i \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2} t}{2}\right\} \quad (21)$$

となるわけだが、ここで、指数関数の中に虚数が入った量が出てきた。これの正体は何だろうか。そこで一般に $\exp(ix)$ という関数の性質を調べてみよう。とりあえず $f(x) = \exp(ix)$ とおいてこれを微分してみよう。

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{de^{ix}}{dx} = ie^{ix} \quad (22)$$

もう一度微分してみよう

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = i \frac{de^{ix}}{dx} = -e^{ix} = -f(x) \quad (23)$$

このように、この関数は2階微分すると元の関数にマイナスをつけたものになっている。これは、関数 $f(x)$ に対する微分方程式と見なせる。このような形の微分方程式は以前に見たことがある。単振動の方程式で $m = k = 1$ とおいた物に他ならない。従って、 $f(x)$ はそのとき求めた一般解を使ってかけるはずである。具体的に $\sqrt{k/m} = 1$ であることを考慮して

$$f(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x \quad (24)$$

となる。あとは C_1 、 C_2 を初期条件から決めるだけである。この関数 $f(x)$ はどんな初期条件を満たすだろうか。もとの $f(x) = e^{ix}$ から $f(0) = e^0 = 1$ である。これを (24) に入ると

$$f(0) = C_2 = 1 \quad (25)$$

(24) を一回微分して

$$\frac{df(x)}{dx} = C_1 \cos x - C_2 \sin x \quad (26)$$

となるが、一方、前に求めた微分の表式 (22) を使えば $f'(0) = ie^0 = i$ でなくてはならない。従って

$$f'(0) = C_1 = i \quad (27)$$

従って

$$f(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (28)$$

となり、三角関数で表される。これをオイラーの公式という。この表式は非常に便利であり振動の問題を扱うとき、今後はもっぱら三角関数ではなく、このような虚数を変数に持つ指数関数を用いる。三角関数は2度微分しないと元の形に戻らないが、指数関数なら1回微分しただけで元の形に戻るのだから微分方程式を取り扱うときには非常に便利なのである。

なお、 e^{ix} の重要な性質として $|e^{ix}| = 1$ がある。これは上の形が絶対値1の複素数の極形式になっていることから容易に分かるだろう。つまり、複素平面上では e^{ix} は原点を中心とする単位円上の偏角 x の点を表していることになる。

さて、これを使って、 $\gamma < 2\omega_0$ の場合の一般解を書き下してみよう。

$$x(t) = C_1 \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \exp\left\{i \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2} t}{2}\right\} + C_2 \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \exp\left\{-i \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2} t}{2}\right\} \quad (29)$$

$$= C_1 \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \left[\cos \left\{ \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2 t}}{2} \right\} + i \sin \left\{ \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2 t}}{2} \right\} \right] \quad (30)$$

$$+ C_2 \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \left[\cos \left\{ \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2 t}}{2} \right\} - i \sin \left\{ \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2 t}}{2} \right\} \right] \quad (31)$$

$$= (C_1 + C_2) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \cos \left\{ \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2 t}}{2} \right\} \quad (32)$$

$$+ i(C_1 - C_2) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \sin \left\{ \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2 t}}{2} \right\} \quad (33)$$

ここで改めて $C'_1 = (C_1 + C_2)$ 、 $C'_2 = i(C_1 - C_2)$ とおくと

$$x(t) = C'_1 \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \cos \left\{ \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2 t}}{2} \right\} + C'_2 \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \sin \left\{ \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2 t}}{2} \right\} \quad (34)$$

となる。これを見ると、振動は起きるのだが、その振幅が指数関数的に振幅していつていることが分かる。また、その振動の振動数も、抵抗のない場合より小さくなっている。とくに抵抗が強くなって $\gamma = 2\omega_0$ に近づくと振動数は0に近づき、それを越えると前節に述べた過減衰の状態になり振動が起きなくなるわけである。

この問題についても、初期値を与えて C'_1 、 C'_2 を定めることは前と同様にできるが、計算が煩雑になるしあまり面白いことがあるわけでもないので省略する。各自試みて見よ。

3.8 強制振動 (空気抵抗のある場合)

このように空気抵抗のある場合は、いずれにせよ放っておいたら止まってしまうわけであまりおもしろくない。そこで、こういう系に外から外力を加えてやって無理矢理振動を引き起こしてやるとどんなことが起きるかを調べてみる。実は、物理学の実験というものは必ず何らかの形でこのように今興味のある系に外から力を加えてやって、系がどのように反応するかを見るものである。今、外力を $F(t)$ として運動方程式を書くと

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\eta \frac{dx}{dt} - kx + F(t) \quad (35)$$

となる。見やすいように、外力の項以外を左辺に移項して、 m で割っておくと

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (36)$$

となる。ただし $f(t) = F(t)/m$ である。

さて、この方程式を解くに当たって、次のことが成り立つことを示しておこう。 $x_0(t)$ を前節でやった減衰振動の方程式 (2) の未知定数2つを含む一般解、 $X(t)$ を方程式 (36) の特殊解とする。このとき方程式 (36) の一般解 $x(t)$ は次の式で与えられる。

$$x(t) = x_0(t) + X(t) \quad (37)$$

ここで、「特殊解」とは、未知定数など含まなくてもいいから、とにかく方程式 (36) を満たす関数という意味である。

証明：これも単に方程式 (36) に代入してみればわかる

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x &= \frac{d^2}{dt^2}(x_0(t) + X(t)) + \gamma \frac{d}{dt}(x_0(t) + X(t)) + \omega_0^2(x_0(t) + X(t)) \\ &= \left\{ \frac{d^2}{dt^2}x_0(t) + \gamma \frac{d}{dt}x_0(t) + \omega_0^2 x_0(t) \right\} \\ &\quad + \left\{ \frac{d^2}{dt^2}X(t) + \gamma \frac{d}{dt}X(t) + \omega_0^2 X(t) \right\} \end{aligned} \quad (38)$$

ここで、最初の括弧の中は $x_0(t)$ が (2) の解であることより 0 になる。2 番目の括弧の中は $X(t)$ が (36) の解であることより $f(t)$ である。従って

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (39)$$

となり、 $x(t)$ は、(36) の解であることがわかる。しかも、この解は $x_0(t)$ の部分に 2 つの未知定数が入っているから一般解である²。

さて、今の場合 $x_0(t)$ は前節ですでに求めてあるから、 $X(t)$ を何か一つ見つけてくればよいことになる。実は、前章で示したように $x_0(t)$ は時間がたてばいずれ 0 になってしまう。従って、いつまでも残る運動はむしろ $X(t)$ の方に含まれている。そのため、この節では初期値問題を解くより、十分時間がたった後でも残る $X(t)$ で表される部分に重点をおいて調べることにする。

以下では、 $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ とおき、外力が一定の周期で振動している場合について調べることにする。運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t \quad (41)$$

となる。ただし $f_0 = F_0/m$ である。

このような解を探すにあたって、前節で用いた複素数の指数関数を使うと便利である。そのために次のような、複素数の関数 $z(t)$ に対する微分方程式を考える。

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = f_0 \exp i\Omega t \quad (42)$$

²このような解法は一般に次のような形の微分方程式に対して応用できる。(この証明は上の証明とほとんど同じなので各自試みて見よ。)

$$\sum_{n=0}^N p_n(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} = F(t) \quad (40)$$

このようなタイプの微分方程式を「非斉次線形常微分方程式」という。「非斉次」というのは、「斉次」の場合と違って右辺に $x(t)$ に依存しない項があるということである。なお、(36) は、「定数係数 2 階非斉次線形常微分方程式」とよばれる。

この方程式で $z = x + iy$ とおくと、

$$\frac{d^2}{dt^2}(x + iy) + \gamma \frac{d}{dt}(x + iy) + \omega_0^2(x + iy) = f_0(\cos \Omega t + i \sin \Omega t) \quad (43)$$

実部と虚部をわけると

$$\frac{d^2}{dt^2}x + \gamma \frac{d}{dt}x + \omega_0^2x + i \left(\frac{d^2}{dt^2}y + \gamma \frac{d}{dt}y + \omega_0^2y \right) = f_0 \cos \Omega t + i f_0 \sin \Omega t \quad (44)$$

複素数が等しいと言うことは、実部と虚部がともに等しいと言うことなので、

$$\frac{d^2}{dt^2}x + \gamma \frac{d}{dt}x + \omega_0^2x = f_0 \cos \Omega t \quad (45)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y + \gamma \frac{d}{dt}y + \omega_0^2y = f_0 \sin \Omega t \quad (46)$$

微分方程式 (45) は (41) と同じである。従って、(41) の解を求めるためには (42) の解を求め、その実部を求めればよいことになる。

今、外力は角振動数 Ω で振動しているので、解としても同じ振動数で振動している解があるはずである。そこで $z(t) = z_0 \exp i\Omega t$ とおいて (42) に代入してみる。

$$\frac{d}{dt} \exp i\Omega t = i\Omega \exp i\Omega t, \quad \frac{d^2}{dt^2} \exp i\Omega t = -\Omega^2 \exp i\Omega t \quad (47)$$

なので

$$-\Omega^2 z_0 \exp i\Omega t + i\Omega \gamma z_0 \exp i\Omega t + \omega_0^2 z_0 \exp i\Omega t = (-\Omega^2 + i\Omega \gamma + \omega_0^2) z_0 \exp i\Omega t = f_0 \exp i\Omega t \quad (48)$$

両辺を $\exp i\Omega t$ で割ると

$$(-\Omega^2 + i\Omega \gamma + \omega_0^2) z_0 = f_0 \quad (49)$$

従って

$$z_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i\Omega \gamma} \quad (50)$$

とおけば $z(t) = z_0 \exp i\Omega t$ は (42) の解である。今

$$\chi(\Omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i\Omega \gamma} \quad (51)$$

とおくと、この量は、外力に対しどれだけの応答を系が示すかを複素数を用いて表したものである。この量は「複素感受率」と呼ぶ。この量には系の特性を表す量が二つ含まれている。 ω_0 と γ である。そこで、周期的外力を加えて、応答を見ることにより、系のこれらの特徴を測定することができる。

とはいえ、 $\chi(\Omega)$ は複素数なので、ちょっとこのままではその物理的意味がつかみにくい。そこで、極形式による表示を取り

$$\chi(\Omega) = |\chi(\Omega)| \exp(-i\beta(\Omega)) \quad (52)$$

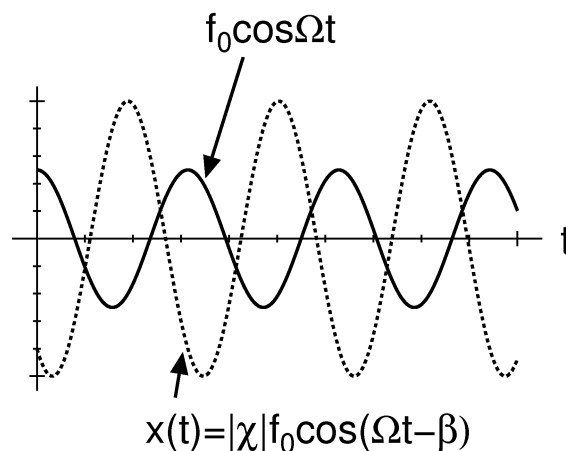
とおいてみよう。すると

$$z(t) = \chi(\Omega) f_0 \exp i\Omega t = |\chi(\Omega)| f_0 \exp i(\Omega t - \beta) = |\chi(\Omega)| f_0 \{\cos(\Omega t - \beta) + i \sin(\Omega t - \beta)\} \quad (53)$$

であるから、実部をとって

$$x(t) = |\chi(\Omega)| f_0 \cos(\Omega t - \beta) \quad (54)$$

である。変位 x は外力の $|\chi(\Omega)|$ 倍の振幅で振動していることが分かる。つまり、 $|\chi|$ が大きいほど敏感に外力に応答しているということになる。この解の時間依存性を、外力 $f_0 \cos \Omega t$ の時間依存性と並べて図示したのが下の図である。



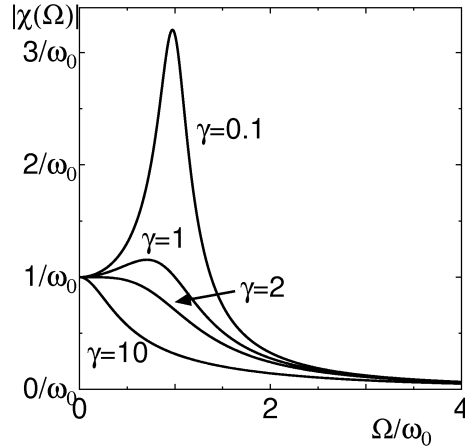
図を見ると、変位は、外力に対しいくらかの遅れをもって振動していることが分かる。その遅れは位相で表すと β だけ遅れている。そこで、 β を位相の遅れと呼ぶ。さて、これら $|\chi|$ や β という量は、外力の振動数を変えるとどのように変化するだろうか。これらの量を Ω を横軸にとってグラフにしてみよう。そのためには $|\chi|$ や β を具体的に求める必要がある。まず、絶対値の定義から

$$\begin{aligned} |\chi(\Omega)| &= \left| \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i\Omega\gamma} \right| = \frac{1}{|\omega_0^2 - \Omega^2 + i\Omega\gamma|} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2\gamma^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{2})^2 + \omega_0^2\gamma^2 - \frac{\gamma^4}{4}}} \end{aligned} \quad (55)$$

これを見ると、 γ と比べて、外力の角振動数 Ω が非常に大きい場合、 $|\chi|$ は 0 に近づくことがわかる。これは、外力の変化に系がついてゆけなくなっていることをあらわしている。これに対し、 Ω が 0 に近づくと $|\chi|$ は一定の値 $\frac{1}{\omega_0}$ に近づくことがわかる。さて、この途中では $|\chi|$ はどのように変化するだろうか。分母が Ω^2 の 2 次関数であることから、 $1/|\chi|$ は $\Omega = \Omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$ で最小値を持つことがわかる。従って、 $|\chi|$ は $\Omega = \Omega_{res}$ で最大値を持つ。すなわち、この系は Ω_{res} の角振動数の外力にもっとも敏感に応答するわけである。この現象を共鳴という。ただし、これは $\omega_0 > \frac{\gamma}{\sqrt{2}}$ の場合だけである。逆に

$\omega_0 < \frac{\gamma}{\sqrt{2}}$ の場合は、 Ω_{res} が実数の範囲では存在しないので、 Ω の増加とともに $|\chi|$ は単調に減少する。

このような $|\chi(\Omega)|$ の Ω 依存性の様子を図示してみると下のようになる。



このように、上で示した $|\chi|$ の振る舞いを Ω の関数として図に示したのものを共鳴曲線という。図からわかるように、 γ が小さいほど共鳴はシャープになる。 γ が ω_0 に比べて十分小さいとき、 $\Omega_{res} \simeq \omega_0$ となる。もともと、抵抗 γ がなければ、角振動数 ω_0 で振動するような系を考えているのだから、元々自分の振動したがつている振動数（固有振動数という）で振ってやれば、振動しやすいと言うことを表している。高校の物理でよくでてくる、音叉の共鳴という現象も一方の音叉の出す音波が、他方の音叉にとっての外力になっていると考えれば、ここでやった計算で理解できる。バイオリンやギターがよく鳴るためには、弦の振動数と楽器の胴の中の空気の定常波の振動数が一致していなくてはならない。もちろん、これらの共鳴を積極的に利用する現象では振動を減衰させる γ はなるべく小さくしなくてはならない。逆に、建物の固有振動数が地震の振動数と一致しては大変である。³

また、共鳴曲線の形から γ を知ることができる。特に、共鳴曲線の最大値から $\Delta\Omega$ だけ離れると $|\chi|$ が最大値の半分になるとき、この $\Delta\Omega$ を半値幅という。 $\gamma \ll \omega_0$ の場合、これを計算してみよう。 $|\chi|$ の最大値は $\frac{1}{\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}$ であるが、 $\gamma \ll \omega_0$ だから、根号の中では ω_0^2 に比べて $\frac{\gamma^2}{4}$ を無視することができる。従って、

$$\frac{1}{2\gamma\omega_0} = |\chi(\Omega_{res} + \Delta\Omega)| \quad (56)$$

とおいて式を変形すると

$$\gamma\sqrt{3}\omega_0 = (\Omega_{res} + \Delta\Omega)^2 - \Omega_{res}^2 = 2(\Omega_{res} + \Delta\Omega)\Delta\Omega \quad (57)$$

³建造物について、このような自然の振動数との共鳴をちゃんと考慮しなかったために惨事が起きた有名な例として、1940年7月1日の、アメリカ、シアトルの近くのタコマ橋の崩壊がある。橋の開通式の日起きた風の振動と橋の振動が共鳴して橋が崩壊する有様が開通式を報道しようとした報道陣のカメラに納められている。ビデオテープ自体は有料で販売されているが、http://www.glendale-h.schools.nsw.edu.au/faculty_pages/ind_arts_web/bridgeweb/Tacoma_page.htm から、短く編集された動画を見ることができるので一見を勧める。

最後の括弧の中で $\Delta\Omega$ は Ω_{res} に比べて小さいので無視し、 $\Omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}} \simeq \omega_0$ と近似できるので

$$\Delta\Omega = \sqrt{3}\gamma \quad (58)$$

となる。このようにして半値幅から γ を知ることができる。 γ で表されている抵抗力は一般に考えている系とその周り環境との相互作用の結果生じるものであるから、半値幅は系とその環境の相互作用についての重要な情報を与えてくれる。物質中での電子や原子核の磁気モーメント（微小な磁石）に磁場中で共鳴振動を起こさせることにより、電子や原子核がおかれた環境を検出することによって物質中の微視的な環境を測定することができる。（核磁気共鳴、電子スピン共鳴）

次に、位相の遅れ β が Ω にどう依存するか、調べてみよう。 $1/\chi$ は次のように表せることに注意する

$$\frac{1}{|\chi|} \exp(i\beta) = \frac{1}{|\chi|} (\cos\beta + i\sin\beta) = \omega_0^2 - \Omega^2 + i\Omega\gamma \quad (59)$$

ここで、実部と虚部を比較すると

$$\frac{1}{|\chi|} \cos\beta = \omega_0^2 - \Omega^2 \quad (60)$$

$$\frac{1}{|\chi|} \sin\beta = \Omega\gamma \quad (61)$$

が得られるので、これから $|\chi|$ を消去すると

$$\tan\beta = \frac{\Omega\gamma}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (62)$$

となる。すなわち

$$\beta = \text{atan}\frac{\Omega\gamma}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (63)$$

となる。 Ω が小さいときは $\beta \simeq \frac{\Omega\gamma}{\omega_0^2}$ となり β も小さい。 Ω をだんだん大きくしてゆくと Ω が ω_0 に近づくとつれ、 atan の中の変数は正に発散する。ということは $\tan\beta$ が正の無限大に近づくので、 β は $\pi/2$ に近づくことになる。 Ω が ω_0 を越えると $\tan\beta$ は負の値をとるがこれは β が $\pi/2$ を越えたことを意味する。さらに、 Ω が大きくなると、 $\tan\beta$ が負の側から 0 に近づくので、 β は π に近づくことになる。これが位相が最も遅れた場合に対応する。外力の振動数が大きくなるにつれ、質点の運動が外力についてゆけなくなり、位相の遅れが大きくなるのが分かる。この様子を図に示すと以下のようなになる。

