

[質点系のポテンシャルエネルギーとエネルギー保存則]

N 個の質点からなる質点系を考える。 i 番目の質点の位置ベクトルを r_i と書く ($i = 1, \dots, N$)。この質点系の各質点に働く力は、その質点系に属する質点からの力 (内力) と質点系の外部からの力 (外力) に分けられる。 i 番目の質点が j 番目の質点から受ける内力を F_{ij} とすると、作用反作用の法則により $F_{ij} = -F_{ji}$ である。 i と j の間に働く力は i と j の相対的な位置関係にのみ依存するので $F_{ij} = F_{ij}(r_{ij})$, ($r_{ij} = r_i - r_j$) と書くことができる。また、 i 番目の質点の受ける外力を $F_i^e(r_i)$ と書くことにする。これらの力はすべて保存力とする。これらを合わせ、 i 番目の質点の受ける力 F_i は

$$F_i = F_i^e + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N F_{ij} \quad (1)$$

で与えられる。自分で自分には力を及ぼさないから 2 項目の和には $i = j$ を含まない。

今、ポテンシャルエネルギーを考えるのであるから、まず基準点を決める必要がある。1 個の質点の場合は単に空間のある 1 点を選んで基準点とするわけであるが、質点系の場合は N 個すべての質点の座標について基準点を決めなくてはならない。すなわち、基準となる点の配置 をきめることになる。その配置から、 (r_1, r_2, \dots, r_N) で表される配置まで各質点を 力 F_i に抗して持って来るのに必要な仕事 がその配置でのポテンシャルエネルギー $U(r_1, r_2, \dots)$ である。基準になる配置としてはどんなものでもよいが、質点同士が無限に離れていれば互いに力を及ぼさないであろうから、そのような配置を基準に取るのが便利である。

以下では、外力によるポテンシャルエネルギー $U_{\text{外}}$ と内力によるポテンシャルエネルギー $U_{\text{内}}$ を分けて考えよう。

1. 外力によるポテンシャルエネルギー

無限遠から、 (r_1, r_2, \dots, r_N) で表される配置まで各質点を 外力 F_i^e に抗して持って来るのに必要な仕事 がその配置での外力によるポテンシャルエネルギー $U_{\text{外}}(r_1, r_2, \dots)$ ということになる。これは単に一つ一つの質点が外力 $F_i^e(r_i)$ の場の中で持つポテンシャルエネルギーの総和に他

ならないから

$$U_{\text{外}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots) = - \sum_{i=1}^N \int_{\infty}^{\mathbf{r}_i} \mathbf{F}_i^e(\mathbf{r}'_i) \cdot d\mathbf{r}'_i = \sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{r}_i) \quad (2)$$

ただし、

$$U_i(\mathbf{r}_i) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}_i} \mathbf{F}_i^e(\mathbf{r}'_i) \cdot d\mathbf{r}'_i \quad (3)$$

は外力の場 $F_i^e(\mathbf{r}_i)$ による i 番目の質点のポテンシャルエネルギーである。

2. 内力によるポテンシャルエネルギー

今度も、無限遠から、 $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ で表される配置まで各質点を 内力 F_{ij} に抗して持って来るに必要な仕事はその配置での内力によるポテンシャルエネルギー $U_{\text{内}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots)$ ということになる。

ただ、今度は全部の質点を一度に無限遠から、望みの配置に持ってこようとすると訳が分からなくなるので、まず1番目を無限遠から r_1 まで持ってくるのに必要な仕事を考える。このときは他の質点はすべて無限遠にあるので力を及ぼさない。従ってこのとき必要な仕事は0である。

次に2番目の質点を無限遠から r_2 まで持ってくるのに必要な仕事を考えよう。このときはすでに1番目の質点が r_1 に存在するので、2番目の質点は1番目の質点から F_{21} の力を受ける。これに抗して2番目の質点を無限遠から r_2 まで持ってくるには、仕事

$$\begin{aligned} W_2 &= - \int_{\infty}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}_1) \cdot d\mathbf{r}'_2 \\ &= - \int_{\infty}^{\mathbf{r}_{21}} \mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}'_{21}) \cdot d\mathbf{r}'_{21} = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}_{21}} \mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (4) \\ &\quad (\text{ここで } \mathbf{r}'_{21} = \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}_1 \text{ とおいた}) \end{aligned}$$

が必要である。ここで、

$$U_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}_{ij}} \mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (5)$$

を定義すれば

$$W_2 = U_{21}(\mathbf{r}_{21}) \quad (6)$$

である。なお関数 $U_{ij}(\mathbf{r}_{ij})$ は $\mathbf{r}_{ji} = -\mathbf{r}_{ij}$ 、 $\mathbf{F}_{ji}(\mathbf{r}_{ji}) = -\mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}_{ij})$ を考慮すれば

$$\begin{aligned} U_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) &= - \int_{\infty}^{\mathbf{r}_{ij}} \mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) \cdot d\mathbf{r}_{ij} \\ &= - \int_{\infty}^{\mathbf{r}_{ji}} \mathbf{F}_{ji}(\mathbf{r}_{ji}) \cdot d\mathbf{r}_{ji} = U_{ji}(\mathbf{r}_{ji}) \end{aligned} \quad (7)$$

をみたしているので、 U については i と j の順序に依存しない (ij について対称) ことに注意せよ。

さて、次に3番目の質点を無限遠から r_3 まで持ってくるのに必要な仕事を考えよう。このときはすでに1番目の質点が r_1 に、2番目の質点が r_2 に存在するので、3番目の質点は1番目の質点から F_{31} 、2番目の質点から F_{32} の力を受ける。従ってこれらの力に抗して3番目の質点を無限遠から r_3 まで持ってくるには、仕事

$$W_3 = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}_{31}} \mathbf{F}_{31}(\mathbf{r}'_{31}) \cdot d\mathbf{r}'_{31} - \int_{\infty}^{\mathbf{r}_{32}} \mathbf{F}_{32}(\mathbf{r}'_{32}) \cdot d\mathbf{r}'_{32} = U_{31}(\mathbf{r}_{31}) + U_{32}(\mathbf{r}_{32}) \quad (8)$$

が必要である。このような計算を繰り返すと、結局最終的に N 個の質点が r_1, r_2, \dots, r_N に配置されるまでに必要な仕事 W は

$$\begin{aligned} W &= W_2 + W_3 + W_4 \dots \\ &= U_{21}(\mathbf{r}_{21}) + U_{31}(\mathbf{r}_{31}) + U_{32}(\mathbf{r}_{32}) \\ &\quad + U_{41}(\mathbf{r}_{41}) + U_{42}(\mathbf{r}_{42}) + U_{43}(\mathbf{r}_{43}) \dots \end{aligned} \quad (9)$$

という形に表される。これがこの配置での質点系の内力によるポテンシャルエネルギー $U_{\text{内}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots)$ を与える。右辺の和で注意すべきことは、上に述べたような手順から考えて、たとえば U_{ij} という項が一度出てきたら、 i と j を入れ替えた形の U_{ji} という項があとからもう一度出てくることはないということである。従って、 $U_{\text{内}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots)$

$$U_{\text{内}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots) = \sum_{\langle ij \rangle} U_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) \quad (10)$$

と表すことができる。ここで、 $\sum_{\langle ij \rangle}$ はすべての2個の質点の対に関する和を表す。つまり、内力のポテンシャルエネルギーは一つ一つの質点に宿っているのではなく、2つずつの質点の対に宿っているとい考えられる。これは(7)で示したように、 U_{ij} と U_{ji} は結局同じものだという事ともつじつまが合っている。

これら二つの寄与を合わせて、質点系のポテンシャルエネルギーは

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots) = U_{\text{外}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots) + U_{\text{内}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots) = \sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{r}_i) + \sum_{\langle ij \rangle} U_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) \quad (11)$$

と表すことができる。

1個の質点の場合と同じように、 i 番目の質点の x 座標を x_i から $x_i + \Delta x_i$ に動かしたときの仕事 $F_{ix}\Delta x_i$ がポテンシャルエネルギーの変化に等しいことより

$$F_{ix} = -\frac{\partial U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots)}{\partial x_i} = -\frac{\partial U_i(\mathbf{r}_i)}{\partial x_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \frac{\partial U_{ij}(\mathbf{r}_{ij})}{\partial x_i} \quad (12)$$

が導ける。証明は1つの質点の時と同じようにできるので各自試みて見よ。他の成分も同様なので

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots)}{\partial \mathbf{r}_i} = -\frac{\partial U_i(\mathbf{r}_i)}{\partial \mathbf{r}_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \frac{\partial U_{ij}(\mathbf{r}_{ij})}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (13)$$

これを

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^e + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \mathbf{F}_{ij} \quad (14)$$

と見比べると、

$$\mathbf{F}_i^e = -\frac{\partial U_i(\mathbf{r}_i)}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (15)$$

$$\mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial U_{ij}(\mathbf{r}_{ij})}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (16)$$

となっていることが分かる。これが質点系に対する力とポテンシャルの関係である。

これを用いると質点系の全エネルギー

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2}{2} + \sum_{i=1}^N U_i(\mathbf{r}_i) + \sum_{\langle ij \rangle} U_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) \quad (17)$$

が保存されることを導くことができる。この証明も1個の質点の場合と同様にできるので、各自試みて見よ。

このように、内力であれ外力であれ、質点系に働いている力が保存力であれば全力学的エネルギーが保存されることが分かる。巨視的なスケール

で見れば摩擦力や空気抵抗など保存力でない力が存在するよう見えるが、微視的なスケールで見ればすべての微視的な粒子の及ぼし合う力は保存力であることが分かっている。摩擦力や空気抵抗は巨視的なスケールのエネルギーを微視的なスケールのエネルギー（熱）に変換しているだけである。