

基礎物理学 I: 試験問題模範解答

1. (a)

$$v = \frac{dr}{dt} = (-\Omega r_0 \sin(\Omega t), \Omega r_0 \cos(\Omega t), v_0)$$

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} = (-\Omega^2 r_0 \cos(\Omega t), -\Omega^2 r_0 \sin(\Omega t), 0)$$

(b) $r = x^2 + y^2 + z^2$ なので

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{kr^2}{2} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{k(x^2 + y^2 + z^2)}{2} = -kx, \text{ 他の成分も同様にして}$$

$$F = -(kx, ky, kz)$$

[別解]

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial r} = kr$$

$\frac{\partial r}{\partial x}$ を求めるには、 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ の両辺を x で微分する。すると

$$2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x$$

となる。従って、 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ となるので $F_x = -\frac{x}{r} kr = -kx$ 、他の成分も同様にして

$$F = -(kx, ky, kz)$$

(c) 釣り合いの点は $F(x) = 0$ より $x = 0, \quad r = \frac{a}{b}$

また、 $F'(x) = a - 3bx^2$ なので、

- $F'(0) = a > 0 \therefore x = 0$ は不安定な釣り合いの点
- $F'(\frac{a}{b}) = -2a < 0 \therefore x = \frac{a}{b}$ は安定な釣り合いの点

従って安定な釣り合いの点は $x_0 = \frac{a}{b}$ で与えられる

x_0 近傍での微小振動の運動方程式は $M\ddot{x} = -(x - x_0) \mid F'(x_0) \mid = -2a(x - x_0)$ となるから、周期 T は $2\pi \sqrt{\frac{M}{2a}}$ となる。

2.

(a) 運動方程式は

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg - \eta \frac{dz}{dt}$$

(b) $\eta = 0$ の場合、運動方程式は

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg \quad \text{すなわち} \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -g$$

t で 1 回積分して

$$v = \frac{dz}{dt} = -gt + C_1 \quad (C_1 \text{ は定数})$$

t でもう 1 回積分して

$$z = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 \quad (C_2 \text{ は定数})$$

$t = 0$ で $v = 0$ [m/s]、 $z = 100$ [m] を代入すると

$$0 = C_1, 100 = C_2$$

従って $g = 9.8$ [m/s²] を代入すると

$$z = -4.9t^2 + 100 \text{ [m]}, \quad v = -9.8t \text{ [m/s]}$$

(c) 速度が一定なので

$$0 = m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg - \eta v_\infty = -0.5 \times 9.8 - 0.1 v_\infty = -0.1(v_\infty + 49)$$

従って $v_\infty = -49$ [m/s]

(d) 運動方程式に数値を代入すると

$$0.5 \frac{d^2 z}{dt^2} = -0.5 \times 9.8 - 0.1 \frac{dz}{dt} = -0.1 \left(\frac{dz}{dt} + 49 \right)$$

$u = \frac{dz}{dt} + 49$ とおくと $\frac{du}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}$ なので $\frac{du}{dt} = -0.2u$ となる。変数を両辺に分離すると

$$\frac{1}{u} du = -0.2 dt$$

これを積分して

$$\ln u = -0.2t + C_1, \quad C_1 \text{ は任意の定数}$$

従って

$$u = \frac{dz}{dt} + 49 = C_1' \exp(-0.2t), \quad \text{ただし } C_1' = e^{C_1}$$

すなわち、速度 v は次のように与えられる

$$v = \frac{dz}{dt} = C_1' \exp(-0.2t) - 49$$

これをもう一度積分して

$$z = -5.0C_1' \exp(-0.2t) - 49t + C_2$$

C_1' 、 C_2 を定めるためには、初期条件が $t = 0$ で $v = 0$ 、 $z = 100$ と与えられていることを利用する。まず速度について、

$$v(0) = C_1' - 49 = 0 \quad \text{すなわち } C_1' = 49$$

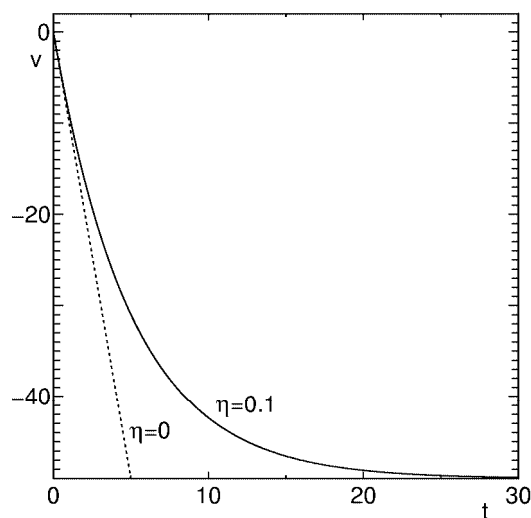
位置について

$$z(0) = -245 + C_2 = 100 \quad \text{すなわち } C_2 = 345$$

従って

$$v = 49 \exp(-0.2t) - 49 [\text{m/s}], \quad z = -245 \exp(-0.2t) - 49t + 345 [\text{m}]$$

- (e) 最初の速度が0なので、初めのうちは速度が小さいため空気抵抗の効果は小さい。従って、どちらも初めのうちはほとんど同じ曲線になる。一方、十分時間がたつと空気抵抗のある場合は空気抵抗と重力が釣り合って終端速度 $v_\infty = -49 [\text{m/s}]$ になるが、空気抵抗のない場合は一定の加速度で速度が増え続ける。



3.

(a) エネルギー $E_i = \frac{1}{2} \times 0.2 \times (0.6 \times 5.0)^2 = 0.9 \text{ [kg m}^2 \text{ s}^{-2}\text{]}$

(b) 角運動量 $L_{zi} = 0.2 \times 0.6^2 \times 5.0 = 0.36 \text{ [kg m}^2 \text{ s}^{-1}\text{]}$

(c) 糸が質点を引く張力は中心力であるから角運動量は保存する。最後の角速度を ω とすると $0.2 \times 0.3^2 \times \omega = 0.36 \text{ [kg m}^2 \text{ s}^{-1}\text{]}$ より $\omega = 20 \text{ [rad/s]}$

(d) $E_f = \frac{1}{2} \times 0.2 \times (0.3 \times 20)^2 = 3.6 \text{ [kg m}^2 \text{ s}^{-2}\text{]}$

糸を引っ張ったときに張力が質点に対してした仕事のみだけエネルギーが増えている。

(e) 角運動量は (b) に述べた理由で変わらないので、 $L_{zf} = L_{zi} = 0.36 \text{ [kg m}^2 \text{ s}^{-1}\text{]}$ 。