

## 基礎物理学 I: 演習問題 II

1.  $x$  軸上を運動する質量  $M$  の質点に働く力が  $F(x)$  と表されるとする。

(a)  $F(x_0) = 0$ 、 $F'(x_0) < 0$  を満たす点  $x_0$  は安定な釣り合いの点であり、 $F(x_0) = 0$ 、 $F'(x_0) > 0$  を満たす点  $x_0$  は不安定な釣り合いの点である。その理由を説明せよ。

(b) 安定な釣り合いの点  $x_0$  の近傍での微小振動の運動方程式から、微小振動の周期  $T$  が

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{|F''(x_0)|}}$$

で与えられることを示せ。

(c) 次の各々の場合について、安定な釣り合いの点  $x_0$ 、および  $x_0$  の近傍での微小振動の運動方程式を求め、微小振動の周期を求めよ。(安定な釣り合いの点が複数ある時はその全てについて求めよ)。

$$1) F(x) = ax - bx^2, \quad a, b > 0.$$

$$2) F(x) = -F_0 \cos(x/a), \quad F_0, a > 0.$$

$$3) F(x) = F_0(3 \exp(-x/a) - 1), \quad F_0, a > 0.$$

2. 上端を固定して鉛直に釣り下げられたばねの下端に質量  $M$  の物体 A が取り付けられている。物体 A は質点と見なしてよいものとし、その変位はすべて鉛直方向のみに起きるものとする。ただし、重力加速度を  $g$  とし、具体的な数値は SI 単位系での値と考えよ。

(a) 物体 A に働く力がばねによる弾性力と重力だけのとき、釣合の位置におけるばねの伸びは幾らか。また、ばねをつりあいの位置から  $x_0$  だけ縮めて物体 A を静止させてからそっと手を離れたときの運動を運動方程式を解くことにより調べよ。ただし、物体 A の釣合の位置から上向きに測った変位を  $x$  とする。また、ばねによる弾性力は、ばねの伸びに比例するものとし、ばね定数を  $k$  とする。

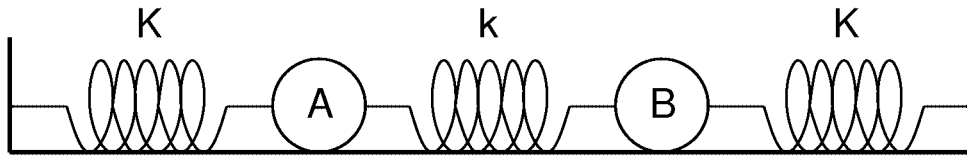
(b) ばねによる弾性力のほかに速度に比例する空気からの抵抗力  $-\eta\dot{x}$  があるとき物体 A の運動方程式を (a) と同じ初期条件のもとで解いて A の運動を調べよ。ただし、 $\eta/M = 4$ 、 $k/M = 3$ 、 $x_0 = 0.03$  とする。

(c)  $\eta/M = 2, k/M = 2$  のとき、(b) と同じ初期条件で運動方程式を解いて A の運動を調べよ。

(d) (c) と同じ条件のもとで鉛直方向に外力  $F = F_0 \cos \Omega t$  が働いたとする。この時、十分長い時間がたった後の物体 A の運動を運動方程式をといて求めよ。また、複素感受率  $\chi(\Omega)$  の絶対値、位相の遅れ  $\beta$  を  $\Omega$  の関数として図示せよ。

3.  $x$  軸上を運動する質量  $m$  の質点に働く力の大きさが原点からの変位  $x$  に比例し (比例係数  $k$ )、向きは変位と同じ向きであるとする。この質点の運動方程式を  $t = 0$  で  $x = x_0$ 、速度  $v = 0$  の初期条件のもとでとき、時間  $t$  の関数として  $x$  を求めよ。

4. 図のように自然長  $L_0$ 、ばね定数  $K$  の 2 つのばねによって壁につながれた質量  $m$  の 2 個の質点 A, B が互いに自然長  $l_0$ 、ばね定数  $k$  のばねでつながれてなめらかな水平面上に置かれている。左のばねの左端から右のばねの右端までの長さは  $L (= 2L_0 + l_0)$  とする。質点の変位はすべて水平面内ばねの長さ方向のみに起きるものとする。このとき、質点 A, B のつりあいの位置からの変位を  $x_A, x_B$  として運動方程式をたて、次のそれぞれの初期条件のもとで運動方程式を解け。



(a)  $t = 0$  で  $x_A = -x_B = x_0, \dot{x}_A = \dot{x}_B = 0$ 。

(b)  $t = 0$  で  $\dot{x}_A = v_0, \dot{x}_B = x_A = x_B = 0$ 。