

基礎物理学I: 演習問題I

注意事項

- 複数で協力して解くことは奨励します。互いに分かった事は教え合うようにしましょう。ただし、無批判に丸写しはしないこと。
- まず、ノート等に解いてから、解いたプロセスが分かるようにまとめたものを提出すること。
- 提出の際には取れないようにホッチキス等で綴じること。大型のクリップ等はかさばって整理に困るので避けて下さい。

1. 質点の位置ベクトル r が時間 t の関数として次のように与えられるとき、速度ベクトル v 、加速度ベクトル a を求めよ。 $(a, b, c, \Omega, \tau, r_0, v_0, \gamma$ は定数、 e_x, e_y, e_z はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトル)

$$1) \quad r = (at, bt^2, ct^3), \quad 2) \quad r = r_0\left(\frac{t}{\tau}, \frac{t^2}{\tau^2}, 1\right)$$

$$3) \quad r = (r_0 \sin(\Omega t), r_0 \cos(\Omega t), v_0 t)$$

$$4) \quad r = r_0(\exp(-\gamma t)e_x + \lambda t e_y + \cos(\omega t)e_z)$$

(注: $\exp(x) = e^x$)

2. x 軸上を運動する質量 M [kg] の質点に働く力 F [N] が時間 t [s] の関数として次のように与えられるとき、時刻 t [s] におけるこの質点の速度 v [m/s] と座標 x [m] を求めよ。但し、時刻 $t = 0$ での座標、速度の値は以下にそれぞれ与える x_0 [m], v_0 [m/s] とする。(この問題では1次元的な運動を扱っているので、本来はベクトルである力や速度などの量も普通の文字で表記した。しかし、これらはスカラー量と言うより1次元のベクトル量と考えるべきである)

$$1) \quad F = t^2, \quad x_0 = v_0 = 0, M = 2$$

$$2) \quad F = |t - 1|, \quad x_0 = v_0 = 0, M = 1$$

$$3) \quad F = \cos(t) + \sin(2t), \quad x_0 = 0, v_0 = 1, M = 4$$

$$4) \quad F = 3 \exp(-2t), \quad x_0 = 1, v_0 = -1, M = 1$$

3. 空気中で重力と空気抵抗を受けて運動する質量 1.0 [kg] の質点を考える。運動は鉛直方向のみ考える。空気抵抗は速度に比例する(比例係数 η)とし、重力加速度を $g = 9.8$ [m/s²] とする。(単位系はSI単位系を用いよ)

- (a) SI 単位系での η の単位はどうか。
- (b) 地上から測った質点の高さを z (上が正) として、運動方程式をたてよ。
- (c) 空気抵抗のないとき ($\eta=0$)、運動方程式をたて時刻 t における速度 v と位置 z を求め、速度 v を時間 t の関数として図示せよ。但し、 $t = 0[\text{s}]$ で $v = 1.0[\text{m/s}]$ 、 $z = 0.0[\text{m}]$ とする。
- (d) (a) で求めた単位での η の値が 0.2 のとき、上と同じ初期条件で運動方程式をたて時刻 t における速度 v と高さ z を求めよ。また、速度 v を時間 t の関数として (c) の場合との違いが分かるように重ねて図示し、なぜそのような違いが出るかを言葉で説明せよ。

[参考]

1. よく使う微分の公式

(a) $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x, \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

(b) $\frac{d}{dx} e^x = e^x, e^x$ のことを $\exp x$ と書くこともある

(c) $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$

(d) $\frac{d}{dx} f(\alpha x) = \alpha f'(\alpha x)$ ただし $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$

(e) $\frac{d}{dx} f(g(x)) = g'(x)f'(g(x))$ ただし $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x), g'(x) = \frac{d}{dx} g(x)$

2. よく使う積分の公式

(a) $\int \cos x dx = \sin x + C, \int \sin x dx = -\cos x + C$

(b) $\int e^x dx = e^x + C$

(c) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

(d) 置換積分 $\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt, x = g(t)$ とおいた

(e) 部分積分 $\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$