

基礎物理学 I: 演習問題 略解

演習問題 III

1. 高校レベルなので省略

2. 時刻 t での宇宙船の質量 (燃料も込み) は $M_0 + m_0 - \alpha t$ 。従って、そのときの運動量は $(M_0 + m_0 - \alpha t)v(t)$ である。同様に、時刻 $t + \Delta t$ では $(M_0 + m_0 - \alpha(t + \Delta t))v(t + \Delta t)$ になっているはずである。

時刻 t から $t + \Delta t$ の間に、噴射された燃料の質量は $\alpha\Delta t$ 、その速度は $-U + v(t)$ ($-U$ は機体に対する燃料の相対速度であることに注意せよ)。従ってこの間に噴射された燃料の運動量は $\alpha\Delta t(-U + v(t))$ 。

一方、宇宙船の運動量は燃料と機体の間には内力しか働いていないので、時刻 t と $t + \Delta t$ で機体 + 燃料の全運動量に変化はないはずである。従って

$$(M_0 + m_0 - \alpha(t + \Delta t))v(t + \Delta t) + \alpha\Delta t(-U + v(t)) = (M_0 + m_0 - \alpha t)v(t)$$

が成り立つ。すなわち

$$(M_0 + m_0 - \alpha(t + \Delta t))v(t + \Delta t) - (M_0 + m_0 - \alpha t)v(t) = \alpha\Delta t(U - v(t))$$

両辺を Δt で割って $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると

$$\frac{d}{dt}(M_0 + m_0 - \alpha t)v(t) = \alpha(U - v(t))$$

$$(M_0 + m_0 - \alpha t)\frac{d}{dt}v(t) - \alpha v(t) = \alpha(U - v(t))$$

これを整理すると

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{U}{t - (M_0 + m_0)/\alpha}$$

これを積分して

$$v(t) = -U \ln |t - (M_0 + m_0)/\alpha| + C$$

$t = 0$ で $v = v_0$ だから

$$v_0 = -U \ln(M_0 + m_0)/\alpha + C \text{ より } C = v_0 + U \ln(M_0 + m_0)/\alpha$$

これを代入して整理すると

$$v(t) = U \ln\{(M_0 + m_0)/\alpha\} / |t - (M_0 + m_0)/\alpha| + v_0$$

燃料がなくなる時刻は $m_0 - \alpha t = 0$ より、 $t = m_0/\alpha$ であるから、この時刻を上式に代入して、

$$v_f = U \ln\{(M_0 + m_0)/M_0\} + v_0$$

3. 回転軸が棒を支える力は外力であり、全運動量を変化させるため 全運動量は保存しない ので運動量の保存則は使えないことに注意せよ。回転軸を z 軸とする。この z 軸まわりの力 F のモーメント M_z は

$$M_z = xF_y - yF_x$$

と書ける。ただし、 (x, y, z) は力が作用する点の座標である。

回転軸が棒を支える力は作用線が z 軸を通るので、 $x = y = 0$ である。従ってこの力は z 軸の回りにモーメントを持たない。質点に働く重力は作用線が z 軸と平行なので $F_x = F_y = 0$ 。従って、これも z 軸の回りにモーメントを持たない。これら以外には、衝突の際に3質点の間には内力しか働かないから、衝突前後で z 軸の回りの 全角運動量は保存する。

3 質点の運動量ベクトル p 、位置ベクトル r はすべて水平面 (xy 面) 内にある。 z 軸まわりの角運動量 L_z は質点の質量を m 、回転軸から質点までの距離を r 、速度を v 、 z 軸まわりの角速度を ω として

$$L_z = xp_y - yp_x = mr^2\omega$$

と書けるが

$$L_z = pd = mvd = mvr \sin \theta$$

とも書ける。ただし、 d は z 軸から p を含む直線に下ろした垂線の長さ。 θ は xy 面内で p と r のなす角である (これが分からない者は講義ノートを復習すること)。

- 1) 衝突後の角速度を ω とすると、

衝突前の角運動量： $A, B : 0,$

$$C : 0.1[kg] \times 10[m/s] \times 0.6[m] \times \sin(\pi/2)$$

(pとrのなす角 θ は $\pi/2$)

衝突後の角運動量 : $A + C : \omega[\text{rad/s}] \times 0.6^2[\text{m}^2] \times (0.2 + 0.1)[\text{kg}]$,

$B : \omega[\text{rad/s}] \times 0.4^2[\text{m}^2] \times 0.1[\text{kg}]$

故に $0.1 \times 10 \times 0.6 = \omega(0.6^2 \times (0.2 + 0.1) + 0.4^2 \times 0.1)$

より $\omega \simeq 4.84[\text{rad/s}]$

2) 衝突後の A,B の角速度を ω 、C の速度を v とすると、

衝突前の角運動量 : $A, B : 0, C : 0.1[\text{kg}] \times 10[\text{m/s}] \times 0.6[\text{m}] \times \sin(\pi/2)$

衝突後の角運動量 : $A : \omega[\text{rad/s}] \times 0.6^2[\text{m}^2] \times 0.2[\text{kg}]$

$B : \omega[\text{rad/s}] \times 0.4^2[\text{m}^2] \times 0.1[\text{kg}]$

$C : v[\text{m/s}] \times 0.6[\text{m}] \times 0.1[\text{kg}] \times \sin(\pi/2)$

故に

$$0.1 \times 10 \times 0.6 = \omega \times 0.6^2 \times 0.2 + \omega \times 0.4^2 \times 0.1 + v \times 0.6 \times 0.1 \quad (1)$$

完全弾性衝突だからエネルギーが保存する

衝突前のエネルギー : $A, B : 0, C : \frac{1}{2} \times 0.1 \times 10^2[\text{J}]$

衝突後のエネルギー : $A : \frac{1}{2} \times 0.2 \times (\omega \times 0.6)^2[\text{J}]$

$B : \frac{1}{2} \times 0.1 \times (\omega \times 0.4)^2[\text{J}]$

$C : \frac{1}{2} \times 0.1 \times v^2[\text{J}]$

$$\text{故に } 0.1 \times 10^2 = 0.2 \times (\omega \times 0.6)^2 + 0.1 \times (\omega \times 0.4)^2 + 0.1 \times v^2 \quad (2)$$

(1), (2) を解くと次の二つの解が得られる

(a) $\omega \simeq 9.68[\text{rad/s}], v \simeq -4.19[\text{m/s}]$

衝突の結果、C は跳ね返され A,B は回り出す。

(b) $\omega = 0[\text{rad/s}], v = 10[\text{m/s}]$:

衝突が起きなかった場合の解と考えられる。

4. 1) 角運動量 $L = 0.1 \times 0.5^2 \times 3.0 = 0.075[\text{kgm}^2\text{s}^{-1}]$

運動エネルギー $E = \frac{1}{2} \times 0.1 \times 0.5^2 \times 3.0^2 = 0.1125[\text{kgm}^2\text{s}^{-2}]$

糸の張力は円運動の向心力になる $T = 0.1 \times 0.5 \times 3.0^2 = 0.45[\text{N}]$

2) 中心力であるから角運動量は保存する。角速度を ω とすると $0.1 \times 0.3^2 \times \omega = 0.075[kgm^2s^{-1}]$ より $\omega = 8.33[rad/s]$

3) 角運動量は 2) に述べた理由で変わらない。エネルギーは糸を縮めた後では $\frac{1}{2} \times 0.1 \times 0.3^2 \times 8.33^2 = 0.312[kgm^2s^{-2}]$ 。増加分は糸を引っ張ったときに張力が質点に対してした仕事である。

5. 1)

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = U_0 k \sin kx \cos ky \cos kz$$

他の成分も同様にして

$$F = (U_0 k \sin kx \cos ky \cos kz, U_0 k \cos kx \sin ky \cos kz, U_0 k \cos kx \cos ky \sin kz)$$

2)

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{3kr^2}{2}$$

$\frac{\partial r}{\partial x}$ を求めるには次のようにすると楽である。 r の定義 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ の両辺を x で微分すると

$$2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x$$

両辺を $2r$ で割ると $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ となるので、 $F_x = -\frac{3krx}{2}$ 。他の成分も同様にして

$$F = -\left(\frac{3krx}{2}, \frac{3kry}{2}, \frac{3krz}{2}\right) = -\frac{3kr\mathbf{r}}{2}$$

3) 2) と同様にして

$$F = -\frac{(kr + 1)e^{-kr}\mathbf{r}}{r^3}$$

4) 同様に

$$F = \begin{cases} -\frac{2U_0 a^2 \mathbf{r}}{r^4} & (r \geq a) \\ 0 & (r \leq a). \end{cases}$$