

基礎物理学 I: 演習問題 I・II 講評と略解

レポートをチェックすると講義でとったノートに書いてあるはずの計算すらやっていない者が見うけられる。これは能力以前の単なる怠慢である。演習問題を課す主な目的は、成績評価のためではなく、講義の内容を自分の手で再確認する機会を与えるためなので、該当者はこれを機会に猛省し復習すること。

また、運動方程式の解を求める問題では、必ず、運動方程式から出発して最終的な答えが得られるまでのプロセスをちゃんと書くこと。一般解(たとえば単振動での $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ 、落体の運動での $z = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2$ といった式)を丸暗記して、それに初期条件を当てはめただけでは暗記力の訓練になっていても物理の理解にはつながらない。

以下にこれまでに出した問題について、略解を示す。冗長になるのをさけるため、講義ノートと合わせて始めて理解できるように書いてある部分もあるので、分からないところがあれば講義ノートを復習し、それでも分からない点はクラスメート同士で教え合うことを勧める。教わった側だけでなく、教えた側の理解も深まるはずである。もちろん、私への質問も歓迎する。

物理学を始め理工系の学問は段階を追って理解すれば一步一步はそんなに難しいものではないが、一夜漬けで理解するのはたとえ天才でも不可能である。特に、工学部の場合最終回の講義から試験まで1週間しかないので、リアルタイムで講義をフォローしないと危機的状況に陥ると思われるので気をつけてほしい。

なお、 $\frac{dx(t)}{dt}$ を $\dot{x}(t)$ 、 $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ を $\ddot{x}(t)$ などと書く書き方はあまり板書で使わなかったせいか、なれていない人が多いようである。どちらの書き方にも一長一短があるのでこのプリントではあえて混用した。両方の書き方になれてほしい。

演習問題 I

1. 時間で微分するだけなので省略。
2. 基本的には加速度を2回積分するだけなので省略するが、正しく初期条件を満たすようにしなくてはいけないことに注意せよ。特に2)は間違いが多かったので簡単に説明しておく。

(a) $1 \geq t \geq 0$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -t + 1$$

であるから

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t^2}{2} + t + C_1, \quad x = -\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$$

となり、 $t = 0$ で $x = \dot{x} = 0$ より $C_1 = 0, C_2 = 0$ 。すなわち

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t^2}{2} + t, \quad x = -\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2}$$

(b) $t \geq 1$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = t - 1 \text{ であるから}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2}{2} - t + C_3, \quad x = \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + C_3t + C_4$$

となる。この運動は $t \leq 1$ での運動に引き続いて起きるので、 $t = 1$ で x, \dot{x} が (a) で求めた値になるように C_3, C_4 を定めなくてはならない。 $t = 1$ では $x = \frac{1}{3}, \dot{x} = \frac{1}{2}$ である。従って

$$\dot{x}(1) = \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + C_3, \quad x(1) = \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} + C_3 + C_4 \text{ より } C_3 = 1, \quad C_4 = \frac{1}{3}$$

すなわち

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2}{2} - t + 1, \quad x = \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + t + \frac{1}{3}$$

(b) の領域での積分定数を定めるのに $t = 0$ での初期条件をそのまま代入してはいけない。(b) の解は $t \geq 1$ での解であって当然ながら $t = 0$ では使えない。

3.

(a) 運動方程式を書くと

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -mg - \eta \frac{dz}{dt}$$

ここで、 m, z は質点の質量、 z 座標である。SI 単位系では右辺の単位は $[\text{kg m/s}^2]$ 。

左辺の内 $\frac{dz}{dt}$ の単位は $[\text{m/s}]$ なので η の単位は $[\text{kg/s}]$ 。

(b) 上述の通り

(c) 高校レベルなので結果だけ示す

$$z = -4.9t^2 + 1.0t[\text{m}], \quad v = -9.8t + 1.0[\text{m/s}]$$

(d)

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -9.8 - 0.2 \frac{dz}{dt} = -0.2 \left(\frac{dz}{dt} + 49 \right)$$

$u = \frac{dz}{dt} + 49$ とおくと $\frac{du}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$ なので $\frac{du}{dt} = -0.2u$ となる。変数を両辺に分離すると

$$\frac{1}{u} du = -0.2 dt$$

これを積分して

$$\ln u = -0.2t + C_1, \quad C_1 \text{は任意の定数}$$

従って

$$u = \frac{dz}{dt} + 49 = C'_1 \exp(-0.2t), \quad \text{ただし } C'_1 = e^{C_1}$$

すなわち、速度 v は次のように与えられる

$$v = \frac{dz}{dt} = C'_1 \exp(-0.2t) - 49$$

これをもう一度積分して

$$z = -5.0C'_1 \exp(-0.2t) - 49t + C_2$$

C'_1, C_2 を定めるためには、初期条件が $t = 0$ で $v = 1.0$ 、 $z = 0$ と与えられていることを利用する。まず速度について、

$$v(0) = C'_1 - 49 = 1 \quad \text{すなわち } C'_1 = 50$$

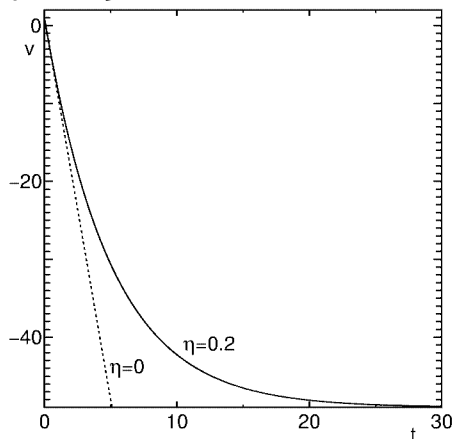
位置について

$$z(0) = -250 + C_2 = 0 \quad \text{すなわち } C_2 = 250$$

従って

$$v = 50e^{-0.2t} - 49[m/s], \quad z = -250e^{-0.2t} - 49t + 250[m]$$

安直に $v = -gt - \eta vt$ などといった式を書いている者があったが、速度 v は時間と共に変化するので、このようには書けない。ちゃんと運動方程式を解かなくてはいけない。グラフは下図のようになる



ただし、この図のスケールではよく見えないが、 t の小さいうちは上向きに運動していて、空気抵抗が下向きに働くので、空気抵抗のある場合の方がいない場合よ

り速度が小さく点線の方が上になっている。十分時間がたつと空気抵抗のある場合は空気抵抗と重力が釣り合って終端速度 $v = -49[m/s]$ になっている。

演習問題 II

1.

- (a) つりあいの点の条件は力が働かないのであるから $F(x_0) = 0$ 。また、 $x \simeq x_0$ では、 $F(x) \simeq (x - x_0)F'(x_0)$, $(F'(x_0) = \frac{dF(x)}{dx} \Big|_{x=x_0})$ となるが、不安定な釣合点の近傍では力が常に質点を x_0 から更に遠ざけるように働かなければならないから、 $F'(x_0) > 0$ でなくてはならない。逆に安定な釣合点の近傍では力が常に質点を x_0 に引き戻すように働かなければならないから、 $F'(x_0) < 0$ でなくてはならない。
- (b) 安定な釣り合いの点の近傍では、上に述べたことより微小振動の運動方程式は $M\ddot{x} = -(x - x_0) |F'(x_0)|$ となるから、角振動数は $\sqrt{|F'(x_0)|/M}$ 、周期は $2\pi \sqrt{M/|F'(x_0)|}$ で与えられる。
- (c) 上に述べたことを使うと

1) $x_0 = 0, F'(0) = a > 0$ 不安定,

$x_0 = a/b, F'(a/b) = -a < 0$ 安定 周期: $2\pi \sqrt{M/a}$

2) $x_0 = (n + \frac{1}{2})\pi, n$ は整数

$n = 2l$ (偶数) の時 :: $F'(2la\pi) = \frac{F_0}{a} > 0$ 不安定

$n = 2l + 1$ (奇数) の時: $F'((2l + 1)a\pi) = -\frac{F_0}{a} < 0$ 安定 周期: $2\pi \sqrt{Ma/F_0}$

3) $x_0 = a \ln 3,$

$F'(a \ln 3) = -\frac{F_0}{a} < 0$ 安定 周期: $2\pi \sqrt{Ma/F_0}$

2.

- (a) 釣り合いの位置での伸びを d と書くと

$$kd = mg \text{ 従って } d = mg/k$$

講義でやった計算の通りにやると一般解は

$$x = C_1 \cos(\sqrt{k/mt}) + C_2 \sin(\sqrt{k/mt})$$

である。この導き方が分からない者は、講義ノートを復習すること。初期条件を代入すると

$$x = x_0 \cos(\sqrt{k/mt})$$

となる

(b) 以下は講義で説明したとおりの計算を具体的な数値をいれて実行することであるが、思ったよりできていなかったののでやや詳しく説明しておく。

(b) 運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = 0 \quad (1)$$

$x = \exp(\lambda t)$ とおくと

$$(\lambda^2 + 4\lambda + 3) \exp(\lambda t) = 0$$

任意の t に対してこれが成り立つには

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

でなくてはならない。従って $\lambda = -3, -1$ が得られる。すなわち、 $\exp(-3t), \exp(-t)$ がこの微分方程式 (1) の解となる。従って、これらの線形結合

$$x(t) = C_1 \exp(-3t) + C_2 \exp(-t)$$

が (1) の一般解である (なぜそうなるか分からない人は、講義ノートを復習すること)。これを微分して速度 $\dot{x}(t)$ は

$$\dot{x}(t) = -3C_1 \exp(-3t) - C_2 \exp(-t)$$

となる。

未定の定数 C_1, C_2 は初期条件より次のように決めることができる。

$$x(0) = C_1 + C_2 = 0.03, \quad \dot{x}(0) = -3C_1 - C_2 = 0$$

これより

$$C_1 = -0.015, \quad C_2 = 0.045$$

従って

$$x = 0.045 \exp(-t) - 0.015 \exp(-3t)$$

となる。

(c) 運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 0 \quad (2)$$

前問と同様に計算すると

$$\lambda = -1 + i, -1 - i$$

すなわち

$$\exp(-(1-i)t), \exp(-(1+i)t)$$

が解である。ここで

$$\exp(-(1 \mp i)t) = \exp(-t) \exp(\pm it) = \exp(-t)(\cos t \pm i \sin t)$$

に注意すると、一般解は

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \exp(-t)(\cos t + i \sin t) + C_2 \exp(-t)(\cos t - i \sin t) \\ &= (C_1 + C_2) \exp(-t) \cos t + i(C_1 - C_2) \exp(-t) \sin t \\ &= C'_1 \exp(-t) \cos t + C'_2 \exp(-t) \sin t, \quad (C'_1 = C_1 + C_2, C'_2 = i(C_1 - C_2)) \end{aligned}$$

と書ける。

前問と同様に初期条件を入れて未定の定数 C'_1, C'_2 を定めると

$$x = 0.03 \exp(-t)(\cos t + \sin t)$$

が得られる

(d) 運動方程式は

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 2x = \frac{F_0}{M} \cos \Omega t \quad (3)$$

この方程式の一般解 $x(t)$ は (2) の一般解 $C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ と (3) の特殊解 $X(t)$ を使って $x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + X(t)$ と書ける (理由は講義ノートを参照) が、十分時間がたった後では (2) の一般解は 0 に近づくので、特殊解 $X(t)$ だけを求めればよい。

複素数 $z = x + iy$ が次の方程式を満たすとすると

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2 \frac{dz}{dt} + 2z = \frac{F_0}{M} \exp i\Omega t \quad (4)$$

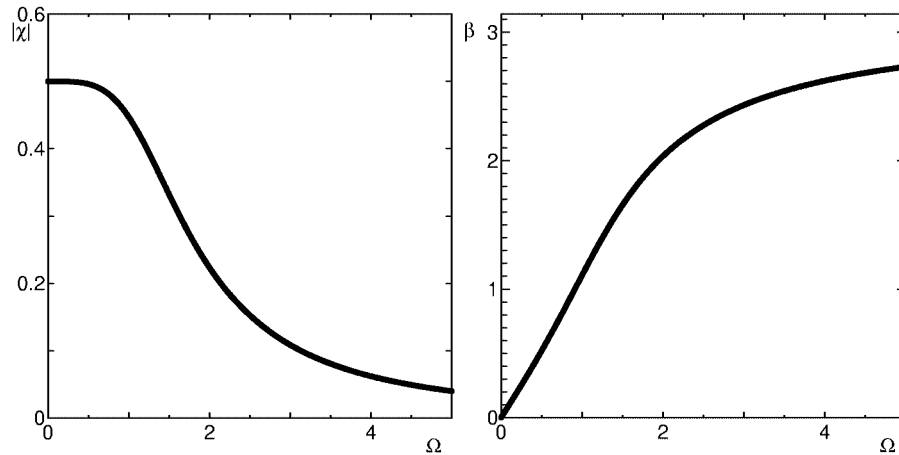
z の実部 $x = \operatorname{Re} z$ は (3) を満たすので (4) の特殊解 $z(t)$ を一つ見つければ、その実部 $\operatorname{Re} z$ が求める (3) の特殊解 $X(t)$ である。そこで $z(t) = \chi(\Omega) F_0 \exp(i\Omega t)$ とおいて (4) に代入してみる。すると

$$\chi(\Omega) = \frac{1}{M(-\Omega^2 + 2i\Omega + 2)}$$

となっていれば $z(t) = \chi(\Omega) F_0 \exp(i\Omega t)$ が (4) をみたしていることが分かる。 $\chi = |\chi| \exp(-i\beta)$ とおくと

$$\begin{aligned} |\chi(\Omega)| &= \frac{1}{|M(-\Omega^2 + 2i\Omega + 2)|} \\ &= \frac{1}{M \sqrt{(2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2}} = \frac{1}{M \sqrt{4 + \Omega^4}} \\ \tan \beta &= 2\Omega / (2 - \Omega^2) \end{aligned}$$

でありその Ω 依存性は以下の図のようになる ($|\chi(\Omega)|$ の縦軸は $1/M$ を単位とする)



十分時間がたった後の解はこれらの量を使って

$$x(t) = X(t) = \text{Re}z(t) = |\chi| F_0 \cos(\Omega t - \beta)$$

と書ける。すなわち、外力より β だけ遅れた位相で外力の $|\chi|$ 倍の振幅で振動を続ける。

この状況はちょうど共鳴が起きるときと起きないときの境目の状況になっている。

3. 運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = kx$$

$x = \exp(\lambda t)$ とおくと。

$$m\lambda^2 \exp(\lambda t) = k \exp(\lambda t)$$

ゆえに $\lambda = \pm \sqrt{k/m}$ 。従って $x = \exp(\pm \sqrt{k/m} t)$ が解。このふたつの線形結合を作って、一般解は

$$x = C_1 \exp(\sqrt{k/m} t) + C_2 \exp(-\sqrt{k/m} t)$$

初期条件より

$$x_0 = C_1 + C_2, \quad 0 = \sqrt{k/m}(C_1 - C_2)$$

従って

$$C_1 = \frac{1}{2}x_0, \quad C_2 = \frac{1}{2}x_0$$

すなわち

$$x = \frac{1}{2}x_0(\exp(\sqrt{k/m} t) + \exp(-\sqrt{k/m} t))$$

すなわち、少しでも原点から離れるとどんどん加速されて原点から離れていってしまう。これは不安定なつりあいの点の近傍の運動を表している。

4. 各質点の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x_A}{dt^2} = -Kx_A - k(x_A - x_B) \quad (5)$$

$$m \frac{d^2 x_B}{dt^2} = -Kx_B - k(x_B - x_A) \quad (6)$$

である。 $X = \frac{x_A + x_B}{2}$, $x = x_A - x_B$ と置くとこれらは

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -KX \quad (7)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -(K + 2k)x \quad (8)$$

を満たすので、 $\omega_+ = \sqrt{K/m}$, $\omega_- = \sqrt{(K + 2k)/m}$ とおくと

$$X = C_1 \cos(\omega_+ t) + C_2 \sin(\omega_+ t)$$

$$x = C_3 \cos(\omega_- t) - C_4 \sin(\omega_- t)$$

$x_A = X + x/2$, $x_B = X - x/2$ より、

$$x_A = C_1 \cos(\omega_+ t) + C_2 \sin(\omega_+ t) + (C_3/2) \cos(\omega_- t) + (C_4/2) \sin(\omega_- t)$$

$$x_B = C_1 \cos(\omega_+ t) + C_2 \sin(\omega_+ t) - (C_3/2) \cos(\omega_- t) - (C_4/2) \sin(\omega_- t)$$

である。従って、速度は

$$\dot{x}_A = -\omega_+ C_1 \sin(\omega_+ t) + \omega_+ C_2 \cos(\omega_+ t) - (\omega_- C_3/2) \sin(\omega_- t) + (\omega_- C_4/2) \cos(\omega_- t)$$

$$\dot{x}_B = -\omega_+ C_1 \sin(\omega_+ t) + \omega_+ C_2 \cos(\omega_+ t) + (\omega_- C_3/2) \sin(\omega_- t) - (\omega_- C_4/2) \cos(\omega_- t)$$

(a) 初期条件をいれると

$$x_0 = C_1 + C_3/2, \quad -x_0 = C_1 - C_3/2$$

$$0 = \omega_+ C_2 + \omega_- C_4/2, \quad 0 = \omega_+ C_2 - \omega_- C_4/2$$

故に $C_3/2 = x_0$, $C_1 = C_2 = C_4 = 0$

$$x_A = x_0 \cos(\omega_- t), \quad x_B = -x_0 \cos(\omega_- t)$$

(b) 初期条件をいれると

$$0 = C_1 + C_3/2, \quad 0 = C_1 - C_3/2$$

$$v_0 = \omega_+ C_2 + \omega_- C_4/2, \quad 0 = \omega_+ C_2 - \omega_- C_4/2$$

故に $C_1 = C_3 = 0$, $C_2 = \frac{v_0}{2\omega_+}$, $C_4/2 = \frac{v_0}{2\omega_-}$

$$x_A = \frac{v_0}{2\omega_+} \sin(\omega_+ t) + \frac{v_0}{2\omega_-} \sin(\omega_- t)$$

$$x_B = \frac{v_0}{2\omega_+} \sin(\omega_+ t) - \frac{v_0}{2\omega_-} \sin(\omega_- t)$$