

微小環電流と磁気双極子

1 微小環電流の作る磁場

ビオ・サバルの法則により

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1)$$

ここで積分の向きは微小閉曲線 C を含む微小面 S の単位法線ベクトル \mathbf{n} の指し示す方向から見て、反時計回りに行うことにする（この方向に電流が流れているとき $I > 0$ になるようにする。）ここで、 \mathbf{r}_0 を S 内の 1 点とし、 $\Delta\mathbf{r}' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}_0$ 、 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ とおくと

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\Delta\mathbf{r}' \times (\mathbf{R} - \Delta\mathbf{r}')}{|\mathbf{R} - \Delta\mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\Delta\mathbf{r}' \times (\mathbf{R} - \Delta\mathbf{r}')}{\{(\mathbf{R} - \Delta\mathbf{r}')^2\}^{3/2}} \quad (2)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\Delta\mathbf{r}' \times (\mathbf{R} - \Delta\mathbf{r}')}{(\mathbf{R}^2 - 2\mathbf{R} \cdot \Delta\mathbf{r}' + (\Delta\mathbf{r}')^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\Delta\mathbf{r}' \times (\mathbf{R} - \Delta\mathbf{r}')}{R^3 \left(1 - 2\frac{\mathbf{R} \cdot \Delta\mathbf{r}'}{R^2} + \frac{(\Delta\mathbf{r}')^2}{R^2}\right)^{3/2}} \quad (3)$$

ここで、分母の 3 つの項を見ると $\Delta\mathbf{r}'$ の大きさ R に比べてきわめて小さい状況を考えているので、第 1 項 \gg 第 2 項 \gg 第 3 項である。従って、第 3 項を無視し、 x が小さいときに成り立つ $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ を用いる（ここでは $x = -2\frac{\mathbf{R} \cdot \Delta\mathbf{r}'}{R^2}$ 、 $\alpha = -3/2$ ととった）と

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} \oint_C d\Delta\mathbf{r}' \times (\mathbf{R} - \Delta\mathbf{r}') \left(1 + 3\frac{\mathbf{R} \cdot \Delta\mathbf{r}'}{R^2}\right) \quad (4)$$

$$\approx \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} \left\{ \left(\oint_C d\Delta\mathbf{r}' \right) \times \mathbf{R} - \oint_C d\Delta\mathbf{r}' \times \Delta\mathbf{r}' + \frac{3}{R^2} \oint_C (d\Delta\mathbf{r}' \times \mathbf{R})(\mathbf{R} \cdot \Delta\mathbf{r}') \right\} \quad (5)$$

各項を評価する。第 1 項は C を一回りしたときの $\Delta\mathbf{r}'$ の変化を表しているが、一回りすれば元の位置に戻っているため、この変化は 0 である。従って

$$\oint_C d\Delta\mathbf{r}' = 0 \quad (6)$$

第 2 項は、

$$- \oint_C d\Delta\mathbf{r}' \times \Delta\mathbf{r}' = \oint_C \Delta\mathbf{r}' \times d\Delta\mathbf{r}' = 2S\mathbf{n} \quad (7)$$

は前に出てきた $\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}' = 2dS\mathbf{n}$ から出てくる。

第 3 項では

$$\oint_C d((\mathbf{R} \cdot \Delta\mathbf{r}')(\Delta\mathbf{r}' \times \mathbf{R})) = 0 \quad (8)$$

を使うと

$$\oint_C (d\Delta\mathbf{r}' \times \mathbf{R})(\mathbf{R} \cdot \Delta\mathbf{r}') = \oint_C (\mathbf{R} \times \Delta\mathbf{r}')(\mathbf{R} \cdot d\Delta\mathbf{r}') \quad (9)$$

これはベクトルである、このベクトルの x 成分をとりだすと

$$\oint_C (Y\Delta z' - Z\Delta y') (\mathbf{R} \cdot d\Delta \mathbf{r}') \quad (10)$$

ここで $(Y\Delta z' - Z\Delta y')\mathbf{R} = (XY\Delta z' - XZ\Delta y', Y^2\Delta z' - YZ\Delta y', ZY\Delta z' - Z^2\Delta y')$ を一つのベクトル場と見なして、ストークスの定理を適用する。積分変数が $\Delta \mathbf{r}'$ なので、これについての rot を取らなくてはならないことに注意すると

$$\text{rot}_{\Delta \mathbf{r}'}((Y\Delta z' - Z\Delta y')\mathbf{R}) = (-Z^2 - Y^2, XY, XZ) = (-R^2, 0, 0) + X(X, Y, Z) = X\mathbf{R} - \hat{x}R^2 \quad (11)$$

これを用いて (9) の x 成分は

$$\oint_C (Y\Delta z' - Z\Delta y') (\mathbf{R} \cdot d\Delta \mathbf{r}') = \int_S (X\mathbf{R} - R^2\hat{x}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_S (X(\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}) - R^2 n_x) dS \quad (12)$$

S は微小なので、被積分関数は定数と見なしてよいから、この積分は $S(X(\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}) - R^2 n_x)$ に等しい。同様に、 y 、 z 成分も求めると

$$\oint_C (\mathbf{R} \times \Delta \mathbf{r}') (\mathbf{R} \cdot d\Delta \mathbf{r}') = S(\mathbf{R}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}) - R^2 \mathbf{n}) \quad (13)$$

これで第3項が求められた。すべて足し合わせると

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} \left\{ 2S\mathbf{n} + \frac{3S}{R^2} (\mathbf{R}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}) - R^2 \mathbf{n}) \right\} \quad (14)$$

$$= \frac{\mu_0 I S}{4\pi R^3} \left\{ \frac{3\mathbf{R}}{R^2} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n} \right\} \quad (15)$$

$\boldsymbol{\mu} = \mu_0 S I \mathbf{n}$ とおくと

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi R^3} \left\{ \frac{3\mathbf{R}}{R^2} (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{\mu} \right\} \quad (16)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi \mu_0 R^3} \left\{ \frac{3\mathbf{R}}{R^2} (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{\mu} \right\} \quad (17)$$

これは、 r_0 にある磁気双極子 $\boldsymbol{\mu}$ の作る磁場と同じである。

2 磁場中で微小環電流の受ける力のモーメント

微小な閉曲線 C を電流 I が流れている。このときこの環電流が磁場 \mathbf{B} から受ける力のモーメントを考える。閉曲線の微小部分 $d\mathbf{r}$ に働く力 $d\mathbf{F}$ は

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{r} \times \mathbf{B} \quad (18)$$

C は微小なので、 \mathbf{B} も C 上では一定とする。これより、原点の周りの力のモーメント $d\mathbf{M}$ は

$$d\mathbf{M} = I \mathbf{r} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \quad (19)$$

で与えられる。従って、環電流の受ける力のモーメントは

$$\mathbf{M} = I \oint_C \mathbf{r} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \quad (20)$$

ここで、閉曲線 C に沿っての積分の向きは C を境界とする面の単位法線ベクトル \mathbf{n} の指し示す方向から見て反時計回りとし、電流はこの向きを正とする。また、原点は閉曲線 C を含む平面内にとる。 C は微小なので、それを含む面は平面と考えてよい。

ここで、

$$\oint_C d(\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B})) = 0 \quad (21)$$

に注意する。この積分は () 内の量が C を一回りしたときにどれだけ変化するかを表しているが、この量は座標だけの関数なので、一回りしたら元の値に戻っている。これより

$$\oint_C (d\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B})) + \oint_C (\mathbf{r} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{B})) = 0 \quad (22)$$

すなわち

$$\oint_C (d\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B})) = - \oint_C (\mathbf{r} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{B})) \quad (23)$$

なので、ちょっとわざとらしいが

$$\mathbf{M} = \frac{I}{2} \left(\oint_C \mathbf{r} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) + \oint_C \mathbf{r} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \right) \quad (24)$$

と書いて、第2項目だけに (23) をあてはめると

$$\mathbf{M} = \frac{I}{2} \oint_C (\mathbf{r} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) - d\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B})) \quad (25)$$

$$= \frac{I}{2} \oint_C (\mathbf{r} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) + d\mathbf{r} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{r})) \quad (26)$$

$$= -\frac{I}{2} \oint_C (\mathbf{B} \times (\mathbf{r} \times d\mathbf{r})) \quad (27)$$

$\mathbf{r} \times d\mathbf{r}$ の向きは、 $\mathbf{r} \times d\mathbf{r}$ に垂直 (面の単位法線ベクトル \mathbf{n} の向き。このとき、 $d\mathbf{r}$ の向きは \mathbf{n} の指し示す方向から見て反時計回りになっていることに注意。) また、 $\mathbf{r} \times d\mathbf{r}$ の大きさは \mathbf{r} と $d\mathbf{r}$ の作る微小3角形の面積 dS の2倍なので $\mathbf{r} \times d\mathbf{r} = 2dS\mathbf{n}$ 。従って

$$\mathbf{M} = I \oint_C (\mathbf{n} \times \mathbf{B}) dS = \mu_0 I \oint_C (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) dS \quad (28)$$

S は微小なので、被積分関数は定数と見なしてよいから、

$$\mathbf{M} = \mu_0 I S \mathbf{n} \times \mathbf{H} \quad (29)$$

これは $\boldsymbol{\mu} = \mu_0 I S \mathbf{n}$ の磁気双極子が、磁場 \mathbf{H} の中で受ける力のモーメントに等しい。